Parcial 1 (Duración: 1h20)

9 DE FEBRERO 2016 | FLORENT SCHAFFHAUSER

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

Ejercicio 1 (4 puntos)

En la siguiente tabla, indicar con una cruz (sin justificar) el tipo de cada ecuación (puede haber más de una cruz en una fila o una columna dada).

Ecuación	Lineal	Separable	Exacta	Homogénea
$y' = 27y$				
$(4+y^3)y' = 4 - x^3$				
$(y\cos(x) + 2xe^y)$ $+(\text{sen}(x) + x^2e^y - 1)y' = 0$				
$(x^2+y^2) + (2xy)y' = 0$				

Ejercicio 2 (6 puntos)

Se considera el problema de Cauchy

$$(\text{E})\left\{\begin{array}{rcl}(3x^2+4x+2) - 2(y-1)y' & = & 0\\ y(0) & = & 3\end{array}\right.$$

y se denota $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene el punto 0.

a. Mostrar que si $(I, y : I \longrightarrow \mathbb{R})$ es solución de (E), entonces, para todo $x \in I$,

$$y^2(x) - 2y(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3.$$

b. Deducir de lo anterior que, si (I, y) es solución de (E), entonces, para todo $x \in I$,

$$y(x) = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

y precisar el dominio de definición D_y de la función y así obtenida.

c. Mostrar que (D_y, y) en efecto es solución de (E).

Ejercicio 3 (4 puntos)

Se considera el problema de Cauchy

$$(\text{E})\left\{\begin{array}{rcl}(y\cos(x) + 2xe^y) + (\text{sen}(x) + x^2e^y - 1)y' & = & 0\\ y(0) & = & \pi\end{array}\right.$$

y se denota $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene el punto 0.

a. Mostrar que se trata de una ecuación exacta.

b. Supongamos que $(I, y : I \longrightarrow \mathbb{R})$ es solución de (E). Hallar una función $S(x, y)$ tal que, para todo $x \in I$, $S(x, y(x)) = 0$.

Para el último ejercicio, ***escoja uno*** *de los siguientes dos ejercicios.*

Ejercicio 4 `(6 puntos)` **-** ***Sólo haga este ejercicio si no va a hacer el Ejercicio 5.***

En el instante $t = 0$, se lanza verticalmente hacia arriba un proyectil homogéneo de masa m y se denota $v(t)$ la velocidad de la pelota en el instante t. Se denota $\gamma > 0$ el coeficiente de fricción dinámica de ese proyectil.

La segunda de ley de Newton implica que la función v es solución del problema de Cauchy

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{rcl} mv' & = & -mg - \gamma v \\ v(0) & = & v_0 \end{array} \right.$$

donde $g = 9,8\,m.s^{-2}$ es la aceleración del campo de gravedad terrestre y $v_0 > 0$ es la velocidad con la que se lanza el proyectil.

a. Resolver el problema de Cauchy (E) con $m = 1\,\mathrm{kg}$ y $\gamma = 2\,kg.s^{-1}$.

b. Sea $x(t)$ la altura del proyectil en el instante t. Supondremos que $x(0) = 0$. Se recuerda que la función x es solución de la ecuación diferencial $x' = v$.

(i) Determinar el instante T en el cual $v(T) = 0$.

(ii) Si $v_0 = 4,9\,m.s^{-1}(\simeq 17,6\,km.h^{-1})$, ¿cuál es la altura, en centímetros, del proyectil en el instante T? *Indicación:* $\frac{4,9}{2}(1 - \ln 2) \simeq 0,75$.

Ejercicio 5 `(6 puntos)` **-** ***Sólo haga este ejercicio si no hizo el Ejercicio 4.***

Se considera el problema de Cauchy

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{rcl} (3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' & = & 0 \\ y(1) & = & 1 \end{array} \right.$$

y se denota $I \subset]0; +\infty[$ un intervalo abierto que contiene el punto 1.

a. Utilizando la función auxiliar $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ (definida para $x \in I$), mostrar que si (I, y) es solución del problema de Cauchy (E), entonces existe un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ que contiene el punto 1 tal que (J, u) es solución del problema de Cauchy

$$(\mathrm{E}') \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{4u} + \frac{1}{4(u+2)} \right) u' & = & 0 \\ u(1) & = & 1 \end{array} \right.$$

b. Mostrar entonces que, para todo $x \in J$,

$$\ln(x) + \frac{1}{4} \ln u(x) + \frac{1}{4} \ln \big(u(x) + 2 \big) = \frac{1}{4} \ln 3.$$

c. Deducir de lo anterior que, si (I, y) es solución de (E), entonces, para todo $x \in I$,

$$y(x) = -x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}}.$$