Tarea 2 : para entregar el 15/10

2015-II — Florent Schaffhauser

El propósito del problema es mostrar que un revestimiento conexo de un grupo topológico conexo y localmente arco-conexo es, de manera natural y esencialmente única, un grupo topológico.

Sea entonces (G, e_G) un grupo topológico conexo y localmente arco-conexo, con punto marcado en el elemento neutro del grupo. Sea $m_G : G \times G \longrightarrow G$ la multiplicación en el grupo G y sea $i_G : G \longrightarrow G$ la inversión. Queremos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1. *Sea $p : H \longrightarrow G$ un revestimiento conexo de G. Entonces:*

(1) *Para todo $e_H \in p^{-1}(\{e_G\})$, existe una única estructura de grupo topológico en H para la cual la aplicación continua p es un homomorfismo de grupos y e_H es el elemento neutro de H.*

(2) *Si e'_H es otro elemento de $p^{-1}(\{e_G\})$, existe un isomorfismo canónico entre los grupos topológicos (H, e'_H) y (H, e_H) construidos como en el punto anterior.*

1. En esta pregunta, se fija $e_H \in p^{-1}(\{e_G\})$ y se demuestra que es suficiente, para obtener el punto (1) del Teorema 1, encontrar aplicaciones continuas m_H e i_H tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "p\times p"] & H \arrow[d, "p"] \\ G \times G \arrow[r, "m_G"] & G \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_H"] \arrow[d, "p"] & H \arrow[d, "p"] \\ G \arrow[r, "i_G"] & G \end{tikzcd}$$

(donde $(p \times p)(h_1, h_2) = (p(h_1), p(h_2)))$ conmutan y tales que $m_H(e_H, e_H) = e_H$ y $i_H(e_H) = e_H$.

Supongamos entonces que tales aplicaciones m_H e i_H existen. Por la comnutatividad del primer diagrama, se tiene:

$$\forall\, (h_1, h_2) \in H \times H, (p \circ m_H)(h_1, h_2) = m_G(p(h_1), p(h_2)) = p(h_1)p(h_2) \text{ en } G,$$

es decir que p será un homomorfismo de grupos una vez hayamos demostrado que m_H define una ley de grupo en H.

La mayoría del tiempo, denotaremos simplemente h_1h_2 el elemento $m_H(h_1, h_2)$ de H.

a. Mostrar que, para todo $h \in H$, $m_H(e_H, h) = m_H(h, e_H) = h$.
Indicación: Mostrar que las aplicaciones

$$\varrho_1 : h \longmapsto m_H(h, e_H) \quad \text{y} \quad \varrho_2 : h \longmapsto m_H(e_H, h)$$

son dos levantamientos de $p : H \longrightarrow G$ que coinciden en el punto e_H.

b. Mostrar que, para todo $(h_1, h_2, h_3) \in H \times H \times H$, se tiene

$$m_H(h_1, m_H(h_2, h_3)) = m_H(m_H(h_1, h_2), h_3).$$

Indicación: Mostrar que las aplicaciones

$$\varrho_1 : (h_1, h_2) \longmapsto m_H(h_1, m_H(h_2, h_3)) \quad \text{y} \quad \varrho_2 : (h_1, h_2) \longmapsto m_H(m_H(h_1, h_2), h_3)$$

son dos levantamientos de $\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & G \\ (h_1, h_2) & \longmapsto & p(h_1)p(h_2)p(h_3) \end{array} \right.$ que coinciden en el punto (e_H, e_H).

c. Utilizando el mismo método que en la pregunta **a**, mostrar que, para todo $h \in H$, $m_H(i_H(h), h) = m_H(h, i_H(h)) = e_H$.

2. En esta pregunta, queremos demostrar que las aplicaciones m_H e i_H de la pregunta **1** en efecto existen.

a. Sea $p_* : \pi_1(H; e_H) \longrightarrow \pi_1(G; e_G)$ el homomorfismo de grupos inducido por la aplicación continua $p : H \longrightarrow G$. Mostrar que existe un levantamiento m_H de la aplicación continua $m_G \circ (p \times p) : H \times H \longrightarrow G$ al espacio total del revestimiento $p : H \longrightarrow G$ si y solamente si

$$(m_G)_*(\operatorname{Im} p_* \times \operatorname{Im} p_*) \subset \operatorname{Im} p_*. \tag{1}$$

b. Mostrar que la condición (1) en efecto se cumple en $\pi_1(G; e_G)$.
Indicación: Recuerde la definición alternativa de la ley de grupo en $\pi_1(G; e_G)$ cuando G es un grupo topológico.

c. De la misma manera, mostrar que existe un levantamiento i_H de la aplicación continua $i_G \circ p : H \longrightarrow G$ al espacio total del revestimiento $p : H \longrightarrow G$.

d. Demostar la parte (1) del Teorema 1.

3. En esta pregunta, queremos demostrar la parte (2) del Teorema 1 e ilustar ese teorema con unos ejemplos clásicos.

a. Mostrar que si $p : Y \longrightarrow X$ es un revestimiento arco-conexo y y', y son dos puntos en una misma fibra $p^{-1}(\{x\})$, entonces $p_*\pi_1(Y; y')$ y $p_*\pi_1(Y; y)$ son conjugados en $\pi_1(X; x)$.

b. *Bono.* Mostar que si $e'_H \in p^{-1}(\{e_G\})$, entonces existe un único automorfismo f del revestimiento $p : H \longrightarrow G$ tal que $f(e'_H) = e_H$.
Indicación: Utilizando la pregunta anterior, muestre que $p_*\pi_1(H; e'_H) = p_*\pi_1(H; e_H)$ en $\pi_1(G; e_G)$.

c. Mostar, por un argumento de unicidad de tal levantamiento, que el homeomorfismo $f : (H, e'_H) \longrightarrow (H, e_H)$ de la pregunta **b** es necesariamente un homomorfismo de grupos.

d. Mostrar que los homomorfismos

$$\pi : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(3) \text{ y } \varphi : \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(4)$$

construidos en la Tarea 1 son revestimientos simplemente conexos de dos hojas.

e. *Bono.* Deducir de la pregunta **c** que $\pi_1(\mathbf{SO}(n); I_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n = 3, 4$.

4. *Bono.* Mostrar que el núcleo $\ker p$ de un revestimiento conexo de grupos topológicos $p : H \longrightarrow G$ es un sub-grupo normal cerrado y discreto contenido en el centro del grupo H y verificarlo en los ejemplos de la pregunta **3.d**.

Indicación: Muestre que un sub-grupo normal y discreto K de un grupo topológico conexo H está contenido en el centro de H. Para ello, considere $k \in K$ y muestre que la aplicación $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & K \\ h & \longmapsto & hkh^{-1}k^{-1} \end{array} \right.$ está bien definida y es constante.