Solución de la segunda tarea

2015-II — Florent Schaffhauser

1. a. Queremos establecer la conmutatividad de los dos diagramas

$$\begin{tikzcd} & (H, e_H) \arrow[d, "p"] \\ (H, e_H) \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[r, "\rho"] & (G, e_G) \end{tikzcd}$$

para $i = 1, 2$ y mostrar que, de hecho, $\rho_1 = \rho_2 = \mathrm{Id}_H$. Ya que $p \circ m_H = m_G \circ (p \times p)$ y $m_H(e_H, e_H) = e_H$ por hipótesis, se tiene (utilizando que e_G es elemento neutro para m_G)

$$(p \circ \rho_1)(h) = (p \circ m_H)(e_h, h) = m_G(p(e_H), p(h)) = m_G(e_G, p(h)) = p(h)$$

y $\rho_1(e_H) = m_H(e_H, e_H) = e_H$. De la misma manera $p \circ \rho_2 = p$ y $\rho_2(e_H) = e_H$. Así que ρ_1 y ρ_2 son dos levantamientos de la aplicación continua $p : H \longrightarrow G$ al espacio total del revestimiento $p : H \longrightarrow G$, que coinciden en e_H. Ya que H es conexo y localmente arco-conexo, esos dos levantamientos son iguales por unicidad de tal levantamiento. Por el mismo argumento, se tiene de hecho que $\rho_1 = \rho_2 = \mathrm{Id}_H$, lo cual muestra que e_H es un elemento neutro para la ley interna e_H.

b. Queremos establecer la conmutatividad de los dos diagramas

$$\begin{tikzcd} & (H, h_3) \arrow[d, "p"] \\ (H \times H, (e_H, e_H)) \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[r, "\pi_3"] & (G, p(h_3)) \end{tikzcd}$$

para $i = 1, 2$. Ya que $p \circ m_H = m_G \circ (p \times p)$ y $m_H(e_H, e_H) = e_H$ por hipótesis, se tiene (utilizando que la ley interna m_G es asociativa)

$$(p \circ \rho_1)(h_1, h_2) = p(m_H(m_H(h_1, h_2), h_3)) = m_G(m_G(p(h_1), p(h_2)), p(h_3)) = \pi_3(h_1, h_2)$$

y, utilizando el resultado de la pregunta **a**,

$$\rho_1(e_H, e_H) = m_H(m_H(e_H, e_H), h_3) = m_H(e_H, h_3) = h_3.$$

De la misma manera, $p \circ \rho_2 = \pi_3$ y $\rho_2(e_H, e_H) = h_3$. Por unicidad de tal levantamiento de π_3 a H, se tiene que $\rho_1 = \rho_2$, lo cual muestra que m_H es asociativa en H.

c. Definamos $\rho_1(h) = m_H(h, i_H(h))$ y $\rho_2(h) = m_H(i_H(h), h)$ en H. Queremos establecer la conmutatividad de los dos diagramas

$$\begin{tikzcd} & (H, e_H) \arrow[d, "p"] \\ (H, e_H) \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[r, "\rho"] & (G, e_G) \end{tikzcd}$$

para $i = 1, 2$ y mostrar que, de hecho, ρ_1 y ρ_2 ambos son iguales a la aplicación constante $h \longmapsto e_H$. Para ello, se utiliza que, por hipótesis, $p \circ m_H = m_G \circ (p \times p)$, $m_H(e_H, e_H) = e_H$ y $p \circ i_H = i_G \circ p$. Eso demuestra entonces que $i_H(h)$ es un inverso de h en H, con respecto a la ley interna m_H.

2. a. Ya que $H \times H$ es conexo y localmente arco-conexo, sabemos por el criterio visto en clase que la aplicación continua $m_G \circ (p \times p)$ posee un levantamiento m_H que cumple con las condiciones del enunciado si y solamente si $\mathrm{Im}\,(m_G \circ (p \times p))_* \subset \mathrm{Im}\, p_*$. Pero $(m_G \circ (p \times p))_* = (m_G)_* \circ (p_* \times p_*)$, por lo que la condición anterior es equivalente a $(m_G)_*(\mathrm{Im}\, p_* \times \mathrm{Im}\, p_*) \subset \mathrm{Im}\, p_*$.

b. Ya que $\operatorname{Im} p_*$ es un sub-grupo de $\pi_1(G; e_G)$ y que la ley de grupo en $\pi_1(G; e_G)$ es precisamente m_G, se tiene en efecto que se cumple la condición de la pregunta anterior.

c. De la misma manera, la existencia de un levantamiento i_H de la aplicación continua $i_G : G \longrightarrow G$ al espacio total del revestimiento $p : H \longrightarrow G$ tal que $i_H(e_H) = e_H$ es equivalente a la condición $(i_G)^*(\operatorname{Im} p_*) \subset \operatorname{Im} p_*$, la cual sigue inmediatamente de que $\operatorname{Im} p$ es un sub-grupo de $\pi_1(G; e_G)$ y la inversión en $\pi_1(G; e_G)$ es dada por $(i_G)_*$.

d. Hemos demostrado que existen aplicaciones continuas m_H e i_H tal que m_H es una ley interna asociativa en H, con elemento neutro e_H y tal que, para todo h en H, $i_H(h)$ es un inverso para h. Por lo tanto (H, e_H, m_H, i_H) es un grupo topológico. Por conmutatividad del primer diagrama que involucra m_H, $p : H \longrightarrow G$ se vuelve un homomorfismo de grupos de (H, m_H) a (G, m_G). Recíprocamente, si p es un homomorfismo de grupos y e_H es el elemento neutro de H, entonces m_H y i_H tienen que ser los levantamientos cuya existencia hemos demostrado. En particular, tal estructura de grupo topológico en H es única.

3. a. Sean y' y y dos puntos en una misma fibra $p^{-1}(\{x\})$. Ya que Y es arco-conexo, existe un camino η de y' a y en Y. Ese camino (o más exactamente su clase de homotopía) define un isomorfismo $\alpha \longmapsto \eta\alpha\eta^{-1}$ de $\pi_1(Y; y')$ sobre $\pi_1(Y; y)$, el cual induce un isomorfismo $p_*(\alpha) \longmapsto p_*(\eta)p_*(\alpha)p_*(\eta)^{-1}$ del sub-grupo $p_*\pi_1(Y; y')$ de $\pi_1(X; x)$ sobre el sub-grupo $p_*\pi_1(Y; y)$. Ya que $p_*(\eta)$ es un lazo basado en $x \in X$, tenemos en efecto que los dos sub-grupos anteriores son conjugados en $\pi_1(X; x)$.

b. Al ser G un grupo topológico, tenemos que $\pi_1(G; e_G)$ es abeliano. Por lo tanto, los sub-grupos $p_*\pi_1(Y; y')$ y $p_*\pi_1(Y; y)$ son iguales en $\pi_1(X; x)$. El teorema de levantamiento permite entonces concluir que existe una única aplicación continua $f : H \longrightarrow H$ tal que $p \circ f = p$ y $f(e'_H) = e_H$. De la misma manera, existe una única aplicación continua $g : H \longrightarrow H$ tal que $p \circ g = p$ y $g(e_H) = e'_H$. Por la unicidad de un levantamiento de p que envía e_H a e_H o e'_H a e'_H, tenemos que f y g son homeomorfismos inversos el uno del otro. En particular, f es un automorfismo del revestimiento $p : H \longrightarrow G$.

c. Sea m'_H la única estructura de grupo topológico en H que vuelve p un homomorfismo y que hace de e'_H el elemento neutro de H. Fijemos h en H y consideremos las aplicaciones continuas $\rho_1(k) = (f \circ m'_H)(h, k)$ y $\rho_2(k) = m_H(f(h), f(k))$ en H. Queremos establecer la conmutatividad de los dos diagramas

$$\begin{tikzcd} & (H, e_H) \arrow[d, "p"] \\ (H, e_H) \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[r, "\rho"'] & (G, e_G) \end{tikzcd}$$

para $i = 1, 2$. Ya que $p \circ f = p$ y $f(e'_H) = e_H$, se tiene que

$$(p \circ \rho_1)(k) = (p \circ f)(m'_H(h, k)) = (p \circ m'_H)(h, k) = p(h)p(k)$$

y $\rho_1(e'_H) = f(m'_H(h, e'_H)) = f(h)$. De la misma manera, $(p \circ \rho_2)(h, k) = p(h)p(k)$ y $\rho_2(e'_H) = f(h)$. Por unicidad de tal levantamiento, se tiene que $\rho_1 = \rho_2$, lo cual significa que f es un homomorfismo de grupos de (H, m'_H) a (H, m_H).

Notemos que ese f es canónico, pues es el único automorfismo del revestimiento p que envía e'_H a e_H. Eso termina la demostración de la parte (2) del Teorema **1**.

d. En la Tarea 1 vimos que $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)/\{\pm I_2\}$ y que $\mathbf{SO}(4) \simeq (\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2))/\{(I_2, I_2); (-I_2, -I_2)\}$. Ya que la proyeccción canónica al espacio de órbitas de la acción continua de un grupo finito en un espacio topológico de Hausdorff es un revestimiento, tenemos en efecto que las aplicaciones propuestas son revestimientos. Cada uno de esos revestimientos tiene dos hojas pues el grupo que actúa es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en ambos casos.

e. Ya que $\mathbf{SU}(2)$ y $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$ son simplemente conexos y que en ambos casos anteriores $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa de manera libre en ese grupo (por traslación), el grupo fundamental del espacio cociente es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Es decir que $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n = 3, 4$.

4. El núcleo de un revestimiento $p : H \longrightarrow G$ de grupos topológicos es un sub-grupo normal cerrado y discreto. Para mostrar que, si H es conexo, $\ker p$ está contenido en el centro de H, es suficiente mostrar que cualquier sub-grupo normal y discreto K de H está contenido en $\mathcal{Z}(H)$. Para ello, consideremos $k \in K$ y la aplicación continua

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & K \\ h & \longmapsto & hkh^{-1}k^{-1} \end{array} \right. .$$

La aplicacón continua ψ está bien definida pues K es normal en H y como H es conexo y K es discreto, ψ es constante. Ya que $\psi(e_H) = e_H$, tenemos, para todo h en H, $hkh^{-1}k^{-1} = e_H$, es decir que $k \in \mathcal{Z}(H)$.

En los ejemplos de la pregunta **d**, se tiene en efecto que $\{\pm I_2\} = \mathcal{Z}(\mathbf{SU}(2)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{(I_2, I_2); (-I_2, -I_2)\} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)) = \{(\pm I_2, \pm I_2)\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$