Tarea 1 : para entregar el 14/09

2015-II — Florent Schaffhauser

El propósito del problema es calcular $\pi_1(\mathbf{SO}(n); I_n)$ para $n \in \{1;2;3;4\}$. De aquí en adelante, será implícito que el punto de base escogido en $\mathbf{SO}(n)$ es I_n y se denotará simplemente $\pi_1(\mathbf{SO}(n))$ el grupo fundamental del espacio punteado $(\mathbf{SO}(n); I_n)$.

1. Mostrar que $\pi_1(\mathbf{SO}(1)) \simeq \{e\}$ y que $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Se considera la $\mathbb{R}$-álgebra de matrices

$$\mathbb{H} := \left\{ h = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M(2;\mathbb{C}) : (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\},$$

la cual también se identifica al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ y puede ser dotada de la norma hermitiana $\|h\| = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(h^*h)} = \sqrt{|a|^2+|b|^2}$, donde $h^* = {}^t\overline{h}$. Si $a = x+iy$ y $b = u+iv$, podemos escribir

$$h = x\mathbf{1} + yI + uJ + vK,$$

donde

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, $\|h\| = \sqrt{x^2+y^2+u^2+v^2}$.

a. Mostrar que $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathbf{1}$ (éstas son las *relaciones de Hamilton*). Mostrar que eso implica $IJ = K$, $JK = I$ y $KI = J$, así como $JI = -IJ$, $KI = -IK$ y $KJ = -JK$. Note que, en particular, el anillo unitario sub-yacente a $\mathbb{H}$ no es conmutativo.

b. Mostrar que, para todo $h \in \mathbb{H}$, $h^*h = hh^* = \|h\|^2\mathbf{1}$ y deducir de ello que $\mathbb{H}$ es un cuerpo (llamado el *cuerpo de los cuaterniones*). Note que si $h = x\mathbf{1} + yI + uJ + vK$, entonces $h^* = x\mathbf{1} - yI - uJ - vK$.

c. *Bono.* Mostrar que el centro $\mathcal{Z}(\mathbb{H}) := \{p \in \mathbb{H} \mid \forall\, h \in \mathbb{H}, ph = hp\}$ de $\mathbb{H}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra isomorfa a $\mathbb{R}$.

3. Sea $\mathbf{SU}(2) := \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$. Note que la relación $\|h_1h_2\| = \|h_1\|\|h_2\|$ en $\mathbb{H}$ sigue inmediatamente de la relación $h^*h = \|h\|^2\mathbf{1}$ mostrada en **b** e implica que $\mathbf{SU}(2)$ así definido es un grupo. Sea $\mathbf{P} := \{h \in \mathbb{H} \mid h^* = -h\} \simeq \mathbb{R}^3$ el sub-espacio vectorial real de $\mathbb{H}$ generado por I, J y K ($\mathbf{P}$ se llama el *espacio de los cuaterniones puros*).

a. Sea $q \in \mathbf{SU}(2)$. Mostrar que la transformación

$$\pi_q : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ h & \longmapsto & qhq^{-1} \end{array}$$

cumple con la propiedad que, para todo $h \in \mathbb{H}$, $\|\pi_q(h)\| = \|h\|$, es decir que π_q es una transformación ortogonal del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$. Mostrar además que $\pi_q(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$.

b. Se identifica $\pi_q|_{\mathbf{P}}$ con su matriz en la base (I,J,K) de $\mathbf{P}$. Mostrar que la aplicación $\pi : q \longmapsto \pi_q|_{\mathbf{P}}$ define un homomorfismo de grupos topológicos $\pi : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$.

c. *Bono.* Sea $q = [(\cos\theta)\mathbf{1} + (\operatorname{sen}\theta)I] \in \mathbf{SU}(2)$. Mostar que π_q es la rotación directa de ángulo 2θ y de eje la recta generada por I. Utilizando que una rotación en $\mathbb{R}^3$ es producto de rotaciones alrededor de los ejes de coordenadas, deducir de lo anterior que π es sobreyectiva.

d. Mostrar que $\ker\pi = \{\mathbf{1}; -\mathbf{1}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y deducir de ello que $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{R}\mathbf{P}_3$.

e. Deducir de la pregunta anterior que $\pi_1(\mathbf{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Consideremos ahora $(q_1,q_2) \in \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$ y la transformación ortogonal

$$\varphi_{(q_1,q_2)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ h & \longmapsto & q_1hq_2^{-1}. \end{array}$$

Al identificar $\varphi_{(q_1,q_2)}$ con su matriz en la base $(\mathbf{1}, I, J, K)$ de $\mathbb{H}$, se tiene que la aplicación $\varphi : (q_1, q_2) \longmapsto \varphi_{(q_1,q_2)}$ define un homomorfismo de grupos topológicos

$$\varphi : \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(4).$$

Se admitirá que φ es sobreyectivo.

a. Mostrar que $\ker \varphi = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}); (-\mathbf{1}, -\mathbf{1})\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b. *Bono.* Se considera la acción por conjugación de $\mathbf{SU}(2)$ sobre sí mismo y el producto semi-directo asociado $\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2)$. En particular,

$$(p_1, p_2)(r_1, r_2) = (p_1(p_2 r_1 p_2^{-1}), r_1 r_2)$$

en $\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2)$. Sea

$$m : \begin{array}{ccc} \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2) & \longrightarrow & \mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2) \\ (q_1, q_2) & \longmapsto & (q_1 q_2^{-1}, q_2) \end{array}$$

y $\psi := \varphi \circ m^{-1}$. Explícitamente:

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(4) \\ (p_1, p_2) & \longmapsto & \big(h \longmapsto p_1(p_2 h p_2^{-1})\big). \end{array}$$

Mostrar que m es un isomorfismo de grupos topológicos y verificar que ψ es un homomorfismo de grupos topológicos.

c. Mostrar que $\ker \psi = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}); (\mathbf{1}, -\mathbf{1})\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y deducir de ello que ψ induce un isomorfismo de grupos topológicos $\overline{\psi} : \mathbf{SU}(2) \rtimes_\pi \mathbf{SO}(3) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{SO}(4)$, donce $\pi(q) \in \mathbf{SO}(3)$ actúa en $\mathbf{SU}(2)$ por $h \longmapsto qhq^{-1}$.

d. Deducir de la pregunta anterior que $\pi_1(\mathbf{SO}(4)) \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.