Solución de la primera tarea

2015-II Florent Schaffhauser

1. Se tiene $\mathbf{SO}(1) = \{1\}$ y $\mathbf{SO}(2) \simeq S_1$. Por lo tanto, $\pi_1(\mathbf{SO}(1)) \simeq \{e\}$ y que $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$.

2. a. Es inmediato verificar que $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathbf{1}$. La igualdad $IJK = K^2$ implica que $IJ = K^2K^{-1} = K$ y de la relación $IJK = I^2$ se deduce de la misma manera que $JK = I$. Además, $(IJK)I = -I$, luego $(IJ)(KI) = -I$, luego $J(KI) = -\mathbf{1}$ y de ahí $KI = -J^{-1} = J$. Entonces se tiene que $(IJ)(IJ) = K^2 = -\mathbf{1}$, luego $I(IJ)(IJ)J = -IJ$, es decir $JI = -IJ$. Luego $JK = J(IJ) = (JI)J = (-IJ)J = -KJ$ y $KI = (IJ)I = I(JI) = I(-IJ) = -IK$. Ya que por ejemplo $IJ = -JI \neq JI$, el anillo sub-yacente a $\mathbb{H}$ no es conmutativo.

b. Si $h = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, se tiene $\|h\|^2 = |a|^2 + |b|^2$ y

$$h^*h = \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ -b & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2+|b|^2 \end{pmatrix} = \|h\|^2\mathbf{1}.$$

En particular, también se tiene $hh^* = \|h\|^2\mathbf{1}$. Ya que $\|h\|^2 \neq 0$ si $h \neq 0$, lo anterior muestra que $\frac{1}{\|h\|^2}h^*$ es un inverso multiplicativo para $h \neq 0$ y, por lo tanto, el anillo $\mathbb{H}$ es un cuerpo.

c. Sea $p = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}(\mathbb{H})$. Entonces $pI = Ip$ y eso implica en particular que $ib = -ib$, por lo que $b = 0$. También se tiene $pJ = Jp$ y eso implica que $\overline{a} = a$, por lo que, finalemente $p = x\mathbf{1}$ con $x \in \mathbb{R}$ y la aplicación $x \longmapsto x\mathbf{1}$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras de $\mathbb{R}$ sobre $\mathcal{Z}(\mathbb{H})$.

3. Se puede observar que la relación $h^*h = \|h\|^2\mathbf{1}$ en $\mathbb{H}$ implica

$$\|h_1h_2\|^2\mathbf{1} = (h_1h_2)^*(h_1h_2) = h_2^*(h_1^*h_1)h_2 = \|h_1\|^2(h_2^*h_2) = \|h_1\|^2\|h_2\|^2\mathbf{1},$$

por lo que $\|h_1h_2\| = \|h_1\|\|h_2\|$. En particular, los cuaterniones de norma 1 forman un grupo. También se puede observar que, si $h \neq 0$ en $\mathbb{H}$, entonces $\|h^{-1}\| = \frac{1}{\|h\|}$.

a. Ya que $q^*q = \|q\|^2 = 1$ y $\|q\|^2 = |a|^2 + |b|^2$, se tiene $\|q\| = 1$ si y solamente si $q^* = q^{-1}$ en $\mathbb{H} \subset M(2;\mathbb{C})$. Entonces, si $\|q\| = 1$ y $h \in \mathbb{H}$, se tiene

$$\|\pi_q(h)\| = \|qhq^{-1}\| = \|q\|\|h\|\|q\|^{-1} = \|h\|,$$

es decir que π_q es una transformación ortogonal (en particular invertible) de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$. Además, si $h \in \mathbf{P}$, es decir si $h^* = -h$, se tiene

$$(\pi_q(h))^* = (qhq^{-1})^* = qh^*q^{-1} = -qhq^{-1} = -\pi_q(h),$$

así que $\pi_q(\mathbf{P}) \subset \mathbf{P}$. Ya que π_q es invertible, eso implica, al comparar las dimensiones de estos sub-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, que $\pi_q(\mathbf{P}) = P$.

b. Para todo $(q_1, q_2) \in \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$ y todo $h \in \mathbb{H}$, se tiene

$$\pi_{q_1q_2}(h) = (q_1q_2)h(q_1q_2)^{-1} = q_1(q_2hq_2^{-1})q_1^{-1} = \pi_{q_1}(\pi_{q_2}(h)) = (\pi_{q_1} \circ \pi_{q_2})(h),$$

por lo que π es un homomorfismo de grupos de $\mathbf{SU}(2)$ a $\mathbf{O}(3)$. Por la pregunta anterior, ya sabemos que $\operatorname{Im}\pi \subset \mathbf{O}(3)$. Ya que $\mathbf{SU}(2)$ es conexo y que la componente neutra de $\mathbf{O}(3)$ es $\mathbf{SO}(3)$, lo anterior implica que, de hecho, $\operatorname{Im}\pi \subset \mathbf{SO}(3)$.

c. Calculando, para $q = (\cos\theta)\mathbf{1} + (\operatorname{sen}\theta)I$, los vectores $\pi_q(I)$, $\pi_q(J)$ y $\pi_q(K)$ (es decir, las imágenes por $\pi_q|_{\mathbf{P}}$ de los vectores de la base (I, J, K) de $\mathbf{P}$), viene:

$$\pi_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

de modo que cualquier rotación directa alrededor de la recta generada por I en $\mathbf{P}$ está en $\operatorname{Im}\pi$. De la misma manera, se obtiene que cualquier rotación directa alrededor de las rectas generadas por J y K está en $\operatorname{Im}\pi$. Ya que cualquier rotación directa de $\mathbb{R}^3$ es producto de rotaciones directas alrededor de los ejes de coordenadas, tenemos que $\operatorname{Im}\pi = \mathbf{SO}(3)$.

d. Sea $q \in \ker\pi \subset \mathbf{SU}(2)$. Entonces, para todo $h \in \mathbf{P}$, $qhq^{-1} = h$. En particular, q conmuta a I, J y K. Ya que q también conmuta a $\mathbf{1} = I_2$, tenemos que q conmuta a cualquier $h = x\mathbf{1} + yI + uJ + vK$ en $\mathbb{H}$. Es decir que $q \in \mathcal{Z}(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{R}$. Puesto que $\|q\| = 1$, eso implica que $q = \pm\mathbf{1}$. Recíprocamente, $\{\pm\mathbf{1}\} \subset \ker\pi$, así que $\ker\pi = \{\pm\mathbf{1}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Por el primer teorema de isomorfismo, el homomorfismo de grupos continuo y sobreyectivo $\pi : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$ induce un homomorfismo de grupos continuo y biyectivo $\overline{\pi} : \mathbf{SU}(2)/\ker\pi \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$. Ya que $\mathbf{SU}(2)$ es compacto y $\mathbf{SO}(3) \subset M(3;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ es Hausdorff, $\overline{\pi}$ es un homeomorfismo. Ya que el isomorfismo canónico $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ lleva $\mathbf{SU}(2)$ a S_3 y conyuga la aplicación $q \longmapsto (-q)$ en $\mathbf{SU}(2)$ a la aplicación $\vec{v} \longmapsto -\vec{v}$ en S_3, se tiene finalmente que $\mathbf{SO}(3) \simeq S_3/(\vec{v} \sim (-\vec{v})) \simeq \mathbb{R}\mathbf{P}_3$.

e. Ya que $\mathbf{SU}(2) \simeq S_3$ es simplemente conexo y $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ un grupo finito actuando de manera libre en $\mathbf{SU}(2)$ en S_3, se tiene que $\pi_1(\mathbf{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. También se puede utilizar que $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{R}\mathbf{P}_3$ y que $\mathbb{R}\mathbf{P}_3$ tiene una estructura de CW-complejo cuyo 2-esqueleto es homeomorfo a $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$, el cual sabemos tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (esencialmente por el mismo argumento del utilizado arriba para $\mathbb{R}\mathbf{P}_3$...).

4. a. Sea $(q_1, q_2) \in \ker\varphi \subset \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$. Entonces, para todo $h \in \mathbb{H}$, $q_1 h q_2^{-1} = h$. En particular, para $h = \mathbf{1}$, se obtiene que $q_1 = q_2$ y ese elemento tiene entonces que pertenecer a $\mathcal{Z}(\mathbb{H}) \cap \mathbf{SU}(2) = \{\pm\mathbf{1}\}$. Recíprocamente, $\pm(\mathbf{1},\mathbf{1}) \in \ker\varphi$, así que $\ker\varphi = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}); (-\mathbf{1},-\mathbf{1})\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b. Es inmediato verificar, a partir de las definiciones, que la aplicación propuesta m es un isomorfismo de grupos topológicos de $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$ a $\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2)$ cuyo homomorfismo inverso es $m^{-1} : (q_1, q_2) \longmapsto (p_1 p_2, p_2)$. Se puede observar que eso vale para cualquier grupo topologógico G actuando sobre sí mismo por conjugación: el producto semi-directo asociado a esa acción es isomorfo al producto directo del grupo con sí mismo. Para ver que la aplicación $\psi = \varphi \circ m^{-1}$ es un homomorfismo de grupos, basta con notar que es una compuesta de homomorfismo de grupos.

c. Sea $(p_1, p_2) \in \ker\psi \subset \mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2)$. Entonces, para todo $h \in \mathbb{H}$, $p_1(p_2 h p_2)^{-1} = h$. En particular, para $h = \mathbf{1}$ se obtiene que $p_1 = \mathbf{1}$. Luego $p_2 \in \mathcal{Z}(\mathbb{H}) \cap \mathbf{SU}(2) = \{\pm\mathbf{1}\}$. La inclusión recíproca siendo inmediata, se tiene que $\ker\psi = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}); (\mathbf{1},-\mathbf{1})\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y, utilizando como en la pregunta **d** la compacidad de $\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2)$, se obtiene que ψ induce un isomorfismo de grupos topológicos $(\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2))/\ker\psi \simeq \mathbf{SO}(4)$. Para identificar $(\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2))/\ker\psi$ con $\mathbf{SU}(2) \rtimes_\pi \mathbf{SO}(3)$ donde $B = \pi(q) \in \mathbf{SO}(3)$ actúa en $\mathbf{SU}(2)$ por $h \longmapsto qhq^{-1}$ (ya que π es sobreyectiva y $\pi^{-1}(\{\pi(q)\}) = \{\pm q\}$, lo anterior sí define una acción de $\mathbf{SO}(3)$ sobre $\mathbf{SU}(2)$, basta con mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SU}(2) & \longrightarrow & \mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SO}(3) \\ (p_1, p_2) & \longmapsto & (p_1, \pi(p_2)) \end{array}$$

es un homomorfismo sobreyectivo de grupos topológicos cuyo núcleo coincide con $\ker\psi$.

d. Puesto que $\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SO}(3)$ es homeomorfo al espacio topológico producto $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SO}(3)$, se tiene, utilizando que el π_1 de un producto es el producto de los π_1, que

$$\pi_1(\mathbf{SO}(4)) \simeq \pi_1(\mathbf{SU}(2) \rtimes \mathbf{SO}(3)) \simeq \pi_1(\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SO}(3)) \simeq \pi_1(\mathbf{SU}(2)) \times \pi_1(\mathbf{SO}(3)).$$

Ya que $\mathbf{SU}(2) \simeq S_3$ es simplemente conexo, se tiene finalemente que

$$\pi_1(\mathbf{SO}(4)) \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$