Solución del segundo parcial

2015-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Apliquemos Mayer-Vietoris al bouquet de esferas $S_1 \vee S_2 \vee S_3$. Para ello, notemos que se puede encontrar una vecindad X_i de S_i en el bouquet para la cual existe una retracción por deformación de X_i sobre S_i y tal que $X_i \cap X_j$ tenga el tipo de homotopía de un punto. Ya que $H_k(S_i;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ si $k = 0, i$ y 0 si no, la sucesión exacta de Mayer-Vietoris aplicada primero al espacio $S_2 \vee S_3$ da en particular, para $k \geq 1$:

$$H_k(\mathrm{pt}) \longrightarrow H_k(S_2) \oplus H_k(S_3) \longrightarrow H_k(S_2 \vee S_3) \longrightarrow H_{k-1}(\mathrm{pt}) \longrightarrow H_{k-1}(S_2) \oplus H_{k-1}(S_3).$$

Eso implica que $H_k(S_2 \vee S_3) = 0$ si $k \geq 4$, $H_3(S_2 \vee S_3) \simeq H_3(S_3) \simeq \mathbb{Z}$ y $H_2(S_2 \vee S_3) \simeq H_2(S_2) \simeq \mathbb{Z}$. Para $k = 1$, la última flecha en la sucesión escrita arriba es inyectiva (se identifica con $\mathbb{Z} \ni n \longmapsto (n,n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$), así que, nuevamente, $H_1(S_2 \vee S_3) \simeq H_1(S_2) \oplus H_1(S_3) = 0$. Finalemente, $H_0(S_2 \vee S_3) \simeq \mathbb{Z}$, puesto que $S_2 \vee S_3$ es arco-conexo.

Utilizando el mismo método para $S_1 \vee (S_2 \vee S_3)$, se obtiene que $H_k(S_1 \vee S_2 \vee S_3) \simeq \mathbb{Z}$ si $k = 0, 1, 2, 3$ y o si no.

Ejercicio 2. **a.** Para determinar el grupo abeliano $H_k(B_n, S_{n-1};\mathbb{Z})$, utilizaremos las sucesión exacta larga del par (B_n, S_{n-1}). Al ser contraíble B_n para $n \geq 2$, se tiene, para $k \geq 1$, una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_k(B_n, S_{n-1}) \longrightarrow H_{k-1}(S_{n-1}) \longrightarrow 0,$$

la cual implica, para $k \geq 1$, que $H_k(B_n, S_{n-1}) = 0$ si $k \neq n$ y

$$H_n(B_n, S_{n-1}) \simeq H_{n-1}(S_{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$$

(ya que $n - 1 \geq 1$). Finalmente, $H_0(B_n, S_{n-1}) = 0$ puesto que B_n es arco-conexo y $S_{n-1} \subset B_n$ no es vacío.

b. Sea $(X, A) \longrightarrow (X, B)$ el homomorfismo canónico (identidad en X e incusión canónica de A en B). Por naturalidad del homomorfismo de conexión de la sucesión exacta larga de un par topológico, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X,A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_k(X) \\
\downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 2} & & \downarrow{\scriptstyle 3} & & \downarrow{\scriptstyle 4} & & \downarrow{\scriptstyle 5} \\
H_k(B) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X,B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_k(X)
\end{array}$$

Ya que A es un retracto por deformación de B, las flechas verticales 1 y 4 son isomorfismos. También es el caso para las flechas 2 y 5 (que son iguales a la identidad!) y, por aplicación del lema de los 5, la flecha 3 también es un isomorfismo.

c. Ya que $S_{n-1} = \partial B_n$ es un retracto por deformación de $B_n \setminus \{0\}$, la pregunta **b** muestra que $H_k(B_n, B_n \setminus \{0\}) \simeq H_k(B_n, S_{n-1})$, el cual fue calculado en la pregunta **a**.

Se puede notar que, al utilizar la sucesión exacta larga del par (B_1, S_0), se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_1(B_1, S_0) \longrightarrow \underbrace{H_0(S_0)}_{\simeq \mathbb{Z}^2} \longrightarrow \underbrace{H_0(B_1)}_{\simeq \mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H_0(B_1, S_0)}_{=0}$$

luego $H_1(B_1, S_0) \simeq \mathbb{Z}$ (es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango 1), de manera que podemos resolver el ejercicio también en el caso $n = 1$.

Ejercicio 3. La descomposición polar en $\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})$ establece un homeomorfismo entre $\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})$ y $\mathbf{SO}(2) \times \mathbb{R}^2$. Luego $\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})$ y $\mathbf{SO}(2) \simeq S_1$ tienen el mismo tipo de homotopía, por lo que $\pi_1(\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$ y $H_k(\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$ si $k = 0, 1$ y 0 si no.

Ejercicio 4. Sea X un revestimiento conexo del toro $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Ya que $\mathbb{Z}^2$ es un sub-grupo discreto del grupo topológico $\mathbb{R}^2$, la proyección canónica $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es un revestimiento y, ya que $\mathbb{R}^2$ es 1-conexo, el grupo fundamental de T es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Ya que T es localmente arco-conexo y $\pi_1(T)$ es abeliano, las clases de isomorfismo de revestimientos de T están en biyección con los sub-grupos de $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z}^2$. Si H es un sub-grupo no nulo de $\mathbb{Z}^2$, entonces H es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango 1 o 2: si H tiene rango 1, entonces existe una base $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ de $\mathbb{Z}^2$ y un entero n_1 tal que $n_1\vec{v_1}$ es una base de H; y si H tiene rango 2, entonces existe una base $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ de $\mathbb{Z}^2$ y unos enteros (n_1, n_2) tal que n_1 divide n_2 y $(n_1\vec{v_1}, n_2\vec{v_2})$ es una base de H sobre $\mathbb{Z}$ (por el teorema de la base adaptada para sub-módulos de un módulo libre sobre un anillo principal). Nótese que, en ambos casos, la base (v_1, v_2) de $\mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo genera $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

En el primer caso (H de rango 1), el revestimiento de $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ correspondiente a $H \subset \mathbb{Z}^2$ (a saber, $\mathbb{R}^2/H \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$) es isomorfo al revestimiento

$$\mathbb{R} \times S_1 \longrightarrow S_1 \times S_1, \quad (t, z) \longmapsto (e^{i2\pi t}, z^{n_1})$$

y en el segundo caso (H de rango 2), el revestimiento de T correspondiente a H es isomorfo al revestimiento

$$S_1 \times S_1 \longrightarrow S_1 \times S_1, \quad (z_1, z_2) \longmapsto (z_1^{n_1}, z_2^{n_2}).$$

En particular, si $X \longrightarrow T$ es un revestimiento compacto de T, entonces el espacio total de X es homeomorfo a $S_1 \times S_1$.

Ejercicio 5. Por conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "f_n"] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "g_n"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "h_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "j_n"] & B'_n \arrow[r, "q_n"] & C'_n \arrow[r, "e_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

y, por definición de Δ_n ($\Delta_n = d_n h_n^{-1} q_n$), se tiene que $\mathrm{Im}\,(g_n - j_n) \subset \ker \Delta_n$. Sea ahora $b'_n \in \ker \Delta_n$. Entonces $h_n^{-1} q_n(b'_n) \in \ker d_n = \mathrm{Im}\, p_n$ (por exactitud de la primera fila). Es decir que existe $b_n \in B_n$ tal que $p_n(b_n) = h_n^{-1} q_n(b'_n)$, luego $h_n p_n(b_n) = q_n(b'_n)$. Pero por conmutatividad del diagrama, $h_n p_n(b_n) = q_n g_n(b_n)$, luego $g_n(b_n) - b'_n \in \ker q_n = \mathrm{j_n}$ (por exactitud de la segunda fila), es decir que existe $a'_n \in A'_n$ tal que $j_n(a'_n) = g_n(b_n) - b'_n$. Por lo tanto, se tiene que $b'_n \in \mathrm{Im}\,(g_n - j_n)$, es decir $\ker \Delta_n \subset \mathrm{Im}\,(g_n - j_n)$. Eso demuestra la exactitud en B'_n de la sucesión

$$\dots \longrightarrow A_n \overset{(i_n, f_n)}{\longrightarrow} B_n \oplus A'_n \overset{g_n - j_n}{\longrightarrow} B'_n \overset{\Delta_n}{\longrightarrow} A_{n-1} \longrightarrow \dots$$

La exactitud en A_{n-1} y $(B_n \oplus A'_n)$ se demuestra de manera similar. Empecemos con A_{n-1}. Se tiene $(i_{n-1}, f_{n-1}) \circ \Delta_n = 0$ porque $i_{n-1} \circ d_n = 0$ y $f_{n-1} \circ d_n = e_n \circ h_n$ lo cual implica que $f_{n-1} \circ \Delta_n = e_n \circ q_n = 0$. Así hemos demostrado que $\mathrm{Im}\,\Delta_n \subset \ker(i_{n-1}, f_{n-1})$. Recíprocamente, sea $a_{n-1} \in \ker(i_{n-1}, f_{n-1})$. Entonces $a_{n-1} \in \ker i_{n-1} = \mathrm{im}\, d_n$, es decir que existe $c_n \in C_n$ tal que $d_n(c_n) = a_{n-1}$. Luego $0 = f_{n-1}(a_{n-1}) = (f_{n-1} \circ d_n)(c_n) = (e_n \circ h_n)(c_n)$. Por lo tanto, existe $b'_n \in B'_n$ tal que $q_n(b'_n) = h_n(c_n)$. Entonces $\Delta_n(b'_n) = (d_n \circ h_n^{-1} \circ q_n)(b'_n) = d_n(c_n) = a_{n-1}$, de modo que $a_{n-1} \in \mathrm{Im}\,\Delta_n$, *qed*.

Sólo falta mostrar la exactitud en $B_n \oplus A'_n$. Ya que $g_n \circ i_n = j_n \circ f_n$, tenemos que $\mathrm{Im}\,(i_n, f_n) \subset \ker(g_n - j_n)$. Recíprocamente, sea $(b_n, a'_n) \in \ker(g_n - j_n)$. Entonces $g_n(b_n) = j_n(a'_n)$, lo cual implica que $(q_n \circ g_n)(b_n) = (q_n \circ j_n)(a'_n) = 0$. Pero $q_n \circ g_n = h_n \circ p_n$, por lo que $(h_n \circ p_n)(b_n) = 0$, lo cual implica que $p_n(b_n) = 0$, es decir que existe $a_n \in A_n$ tal que $i_n(a_n) = b_n$. Pero entonces $j_n(f_n(a_n) - a'_n) = (g_n \circ i_n)(a_n) - j_n(a'_n) = g_n(b_n) - j_n(a'_n) = 0$, lo cual implica que existe $c'_{n+1} \in C'_{n+1}$ tal que $e_{n+1}(c'_{n+1}) = f_n(a_n) - a'_n$. Sea entonces $c_{n+1} := h_{n+1}^{-1}(c'_{n+1})$. Se tiene $(f_n \circ d_{n+1})(c_{n+1}) = e_n(c'_{n+1}) = f_n(a_n) - a'_n$, luego $a'_n = f_n(a_n - d_{n+1}(c_{n+1}))$ y así hemos demostrado que $(b_n, a'_n) \in \mathrm{Im}(i_n, f_n)$.