Parcial 2 (Duración: 2h)

26 DE OCTUBRE 2015 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio 1. (2 puntos) Calcular la homología singular (con coeficientes en $\mathbb{Z}$) de un bouquet de esferas $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ (donde por S_n se denota la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$).

Ejercicio 2. Sea $n \geq 2$ un entero y sea B_n la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se denota S_{n-1} la frontera de B_n.

a. (2 puntos) Determinar, para todo $k \in \mathbb{N}$, el grupo abeliano $H_k(B_n, S_{n-1}; \mathbb{Z})$.

b. (2 puntos) Sea X un espacio topológico y sea $A \subset B \subset X$ dos sub-espacios de X tales que A es un retracto por deformación de B. Mostar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un isomorfismo $H_n(X, B; \mathbb{Z}) \simeq H_n(X, A; \mathbb{Z})$.

c. (1 punto) Determinar, para todo $k \in \mathbb{N}$, el grupo abeliano $H_k(B_n, B_n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$.

Ejercicio 3. (1 punto) Utilizando la descomposición polar, determinar el grupo fundamental y la homología singular (con coeficientes en $\mathbb{Z}$) del grupo topológico

$$\mathbf{SL}(2; \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(2; \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Ejercicio 4. (1 punto) Sea Y un revestimiento conexo del toro $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Mostrar que si Y es compacto entonces Y es homeomorfo a un producto de 2 círculos.

Ejercicio 5. (1 punto) Se considera el siguiente diagrama conmutativo de grupos abelianos, con filas exactas,

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "f_n"] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "g_n"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "h_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "j_n"] & B'_n \arrow[r, "q_n"] & C'_n \arrow[r, "e_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

y se supone que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, h_n es un isomorfismo.
Mostrar que la sucesión

$$\dots \longrightarrow A_n \xrightarrow{(i_n, f_n)} B_n \oplus A'_n \xrightarrow{g_n - j_n} B'_n \xrightarrow{\Delta_n} A_{n-1} \longrightarrow \dots$$

(donde $\Delta_n = d_n h_n^{-1} q_n$) es exacta en B'_n.

Bono. (2 puntos) Mostrar la exactitud también en $(B_n \oplus A'_n)$ y en A_n.