Solución del primer parcial

2015-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1.

a. Si $S_1 \times S_1$ y S_2 fuesen homeomorfos, entonces $\pi_1(S_1 \times S_1) \simeq \pi_1(S_1) \times \pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sería isomorfo a $\pi_1(S_2) = \{e\}$, lo cual es absurdo.

b. Sea $X := S_1 \vee S_1$ un bouquet de 2 círculos. Entonces X es espacio topológico arco-conexo y, por el teorema de Van Kampen, $\pi_1(S_1 \vee S_1) \simeq \pi_1(S_1) * \pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ es un grupo libre en 2 generadores.

c. El toro $T^2 = S_1 \times S_1$ es arco-conexo y tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, es decir que $\pi_1(T^2)$ es un grupo abeliano libre en 2 generadores.

d. Se tiene $S_n \simeq B_n \cup_\varphi \{p_N\}$ donde B_n es la bola cerrada n-dimensional, $p_N = (0, \ldots, 0, 1)$ pertenece a S_n y $\varphi : S_{n-1} = \partial B_n \longrightarrow \{p_N\}$ es la aplicación constante. En esa descomposición celular, el 1-esqueleto de S_n es $S_n^{(1)} = S_n^{(0)} = \{p_N\}$ (ya que $\dim B_n = n \geq 2$) y su 2-esqueleto es $S_n^{(2)} = \begin{cases} S_2 & \text{si } n = 2, \\ S_n^{(1)} = \{p_N\} & \text{si } n > 2. \end{cases}$

e. Por la descomposición celular anterior y el teorema de Van Kampen, se tiene $\pi_1(S_2) \simeq \pi_1(B_2 \cup_\varphi \{p_N\}) \simeq \pi_1(\{p_N\})/\operatorname{Im}\varphi_* = \{e\}$, ya que $\pi_1(\{p_N\}) = \{e\}$.

Ejercicio 2. El espacio $\mathbb{R}^3 \setminus E$ es arco-conexo y se retrae por deformación al toro T de ecuación $z = \sqrt{(r - \frac{1}{2})(\frac{3}{2} - r)}$ ($\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}$) en coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Por lo tanto, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus E) \simeq \pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.

a. Consideremos el homomorfismo de grupos $\det : \mathbf{U}(2) \longrightarrow \mathbf{U}(1) = S_1$. Tiene núcleo $\mathbf{SU}(2)$ y admite una sección homomórfica $s : z \longmapsto \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (es decir que $(\det \circ s)(z) = z$ y $s(zz') = s(z)s(z')$). Por lo tanto, $\mathbf{U}(2)$ es isomorfo al producto semi-directo $\mathbf{SU}(2) \rtimes_s S_1$, donde S_1 actúa en $\mathbf{SU}(2)$ por $z \cdot A = s(z)As(z)^{-1}$ (esta acción no es trivial: $\operatorname{Im} s$ no está incluida en el centro de $\mathbf{U}(2)$, que es $\mathcal{Z}(\mathbf{U}(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} : z \in S_1 \right\} \simeq S_1$).

b. Por la pregunta anterior, $\mathbf{U}(2)$ es homeomorfo al espacio topológico producto $\mathbf{SU}(2) \times S_1$. Por lo tanto, $\pi_1(\mathbf{U}(2)) \simeq \pi_1(\mathbf{SU}(2)) \times \pi_1(S_1) \simeq \pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z}$, puesto que $\mathbf{SU}(2) \simeq S_3$ es simplement conexo.

Ejercicio 4.

a. Sea $\gamma : t \longmapsto e^{i2\pi t}$ el (lazo cuya clase de homotopía es el) generador habitual de $\pi_1(S_1)$ y sea $J : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(S_1) = <\gamma> \\ n & \longmapsto & [\gamma]^n \end{array}$ el isomorfismo asociado. Ya que $\varphi \circ \gamma : t \longmapsto (e^{i2\pi t})^2 = e^{i4\pi t}$ es homótopo (igual, de hecho) al camino producto γ^2, se tiene, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $(J^{-1}\varphi_* J)(n) = 2n$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}\varphi_* \simeq 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

b. Por el teorema de Van Kampen, se tiene que $\pi_1(B_2 \cup_\varphi S_1) \simeq \pi_1(S_1)/\operatorname{Im}\varphi_* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Se puede observar que $B_2 \cup_\varphi S_1 \simeq \mathbb{R}\mathbf{P}_2$ y que lo anterior demuestra que $\pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio 5. (Bono)

a. Sea $x_1 = (0, 0)$, $x_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ y $x_2 = (\varepsilon, \varepsilon)$ en $C \setminus \Delta$. Sean $\delta_1(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ y $\delta_2(t) = (1-t)x_0 + tx_2$. Sea $\alpha(t) = (t, 0)$, $\beta(t) = (0, t)$ y $\gamma(t)$ el borde de Δ, orientado en el sentido trigonométrico. Sea $a = \delta_1^{-1}\alpha\delta_1$, $b = \delta_1^{-1}\beta\delta_1$ y $c = \delta_2^{-1}\gamma\delta_2$. Ésos son lazos en

$X := (S_1 \times S_1) \setminus \Delta$, basados en x_0. Además, c^{-1} es homótopo a $[a, b]$. Se puede entonces observar que el espacio X se obtiene al pegarle una 2-celda al bouquet de 3 círculos $a \vee_{x_0} b \vee_{x_0} c$ a lo largo del lazo $[a, b]c$ (que en efecto es homótopicamente trivial en X). Ya que $\pi_1(a \vee_{x_0} b \vee_{x_0} c; x_0) \simeq < a > * < b > * < c > \simeq < a, b, c >$, lo anterior demuestra que $\pi_1(X; x_0) \simeq < a, b, c > / < [a, b]c >_N$ donde $< [a, b]c >$ es el sub-grupo normal de $< a, b, c >_N$ generado por el elemento $[a, b]c$. Es decir que $\pi_1(X; x_0)$ tiene presentación finita $< a, b, c \mid [a, b,]c >$.

Para ver que ese grupo es isomorfo al grupo libre $\mathbf{F}_2 =< x, y >$ en 2 generadores, podemos pensar de manera algebraica o de manera geométrica. Algebraicamente, un isomorfismo explícito entre $\mathbf{F}_2$ y $\pi_1(X; x_0)$ viene dado por: $x \longmapsto a$ y $y \longmapsto b$ (el inverso viene dado por $a \longmapsto x$, $b \longmapsto y$ y $(c = [a, b]^{-1} = [b, a]) \longmapsto [y, x]$). Geométricamente, el toro menos un disco (abierto o no) se retrae por deformación a un bouquet de 2 círculos, cuyo grupo fundamental en efecto es isomorfo a $\mathbf{F}_2$.

b. Sea $i : \operatorname{Im} s \hookrightarrow E$ la inclusión canónica y sea $r : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \operatorname{Im} s \\ (\ell, x) & \longmapsto & (\ell, 0) \end{array} \right.$. Se tiene $r \circ i = \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} s}$ y la aplicación $i \circ r$ es homótopa a Id_E vía la aplicación continua $H : \left\{ \begin{array}{ccc} [0; 1] \times E & \longrightarrow & E \\ (t, \ell, x) & \longmapsto & (\ell, tx) \end{array} \right.$ (note que H está bien definida pues si $\ell \in \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ y $x \in \ell$ entonces, para todo $t \in [0; 1]$, $(tx) \in \ell$). Por lo tanto, $\operatorname{Im} s$ es un retracto por deformación fuerte de E (note que, para todo $t \in [0; 1]$, $H|_{\{t\} \times \operatorname{Im} s}$ coincide con $\mathrm{Id}_{\operatorname{Im} s}$). Además, la aplicación $s : \mathbb{R}\mathbf{P}_n \longrightarrow \operatorname{Im} s$ es continua y biyectiva (una sección s de una aplicación p siempre es inyectiva) y como $p|_{\operatorname{Im} s}$ es un inverso continuo para s, se tiene que s es un homeomorfismo. En particular, $\pi_1(E) \simeq \pi_1(\operatorname{Im} s) \simeq \pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}_n) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \text{si } n = 1, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \geq 2. \end{array} \right.$