Parcial 1 (Duración: 2h)

10 DE SEPTIEMBRE 2015 FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio 1.

a. Mostrar que $S_1 \times S_1$ (el producto de dos círculos) no es homeomorfo a la esfera S_2.

b. Dar un ejemplo de espacio topológico arco-conexo cuyo grupo fundamental es isomorfo a un grupo libre en 2 generadores.

c. Dar un ejemplo de espacio topológico arco-conexo cuyo grupo fundamental es isomorfo a un grupo *abeliano* libre en 2 generadores.

d. Sea $n \geq 2$ y sea S_n la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$. Dar una estructura de CW-complejo en S_n que tenga exactamente una 0-celda y una n-celda (se pide explicitar la aplicación característica). ¿Cuál es el 1-esqueleto de S_n en esa descomposición celular? ¿Cuál es su 2-esqueleto?

e. Mostrar que $\pi_1(S_2)$ es el grupo trivial.

Ejercicio 2. Sea $C := S_1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ y sea C' el cilindro relleno $B(0;1/4] \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, donde $B(0;1/4] \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es una bola cerrada en el plano de ecuación $z = 0$. Sea $E := C \cup C'$. Mostrar que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus E) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Indicación: Se podrá hallar un sub-espacio arco-conexo X de $\mathbb{R}^3$ que tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^3 \setminus E$.

Ejercicio 3.

a. Mostrar que el grupo unitario $\mathbf{U}(2)$ es isomorfo a un producto semi-directo $\mathbf{SU}(2) \rtimes S_1$ (precisar cuál es la acción de S_1 en $\mathbf{SU}(2)$).

b. Deducir de lo anterior que $\pi_1(\mathbf{U}(2)) \simeq \mathbb{Z}$.

Ejercicio 4. Sea $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array} \right.$ y sea $X := B_2 \cup_\varphi S_1$ el espacio topológico obtenido al pegarle una bola cerrada B_2 al círculo S_1 vía la aplicación $\varphi : \partial B_2 = S_1 \longrightarrow S_1$ anterior.

a. Sea $\varphi_* : \pi(S_1) \longrightarrow \pi_1(S_1)$ el homomorfismo de grupos inducido por $\varphi : S_1 \longrightarrow S_1$. Identificando $\pi_1(S_1)$ con $\mathbb{Z}$ de la manera habitual, determinar la imagen de φ_* en $\mathbb{Z}$.

b. Mostrar que $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio 5. (Bono)

a. Sea $C := [0;1] \times [0;1]$ con los lados opuestos identificados de tal manera que el espacio cociente sea homeomorfo al toro $S_1 \times S_1$. Sea Δ un disco abierto centrado en el punto $(1/2, 1/2) \in C$ y de radio $\varepsilon < \sqrt{2}/4$. Mostrar que

$$\pi_1((S_1 \times S_1) \setminus \Delta) \simeq < a, b, c \mid [a,b]c = 1 >$$

donde a, b yc son lazos habilmente escogidos en $(S_1 \times S_1) \setminus \Delta$. ¿Por qué es ese grupo isomorfo al grupo libre en 2 generadores?

b. Recuerde que $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ es el conjunto de rectas vectoriales en $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $E := \{(\ell, x) \in \mathbb{R}\mathbf{P}_n \times \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x \in \ell\}$. Sea $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathbf{P}_n \\ (\ell, x) & \longmapsto & \ell \end{array} \right.$ la proyección canónica y sea $s : \mathbb{R}\mathbf{P}_n \longrightarrow E$ la sección de p definida por $s(\ell) = (\ell, 0)$. Mostrar que $\operatorname{Im} s$ es un retracto por deformación fuerte de E y que es homeorfo a $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$. Utilizar lo anterior para identificar $\pi_1(E)$ para todo $n \geq 1$.