# Hoja de ejercicios 3 : Revestimientos

2015-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Mostrar que la proyección canónica $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ es un revestimiento. Determinar el grupo fundamental de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Ejercicio 2. Sea $p : Y \longrightarrow X$ un revestimiento.
**a.** Mostar que si $p$ tiene una sola hoja, entonces $p$ es un homeomorfismo.
**b.** Mostrar que si $X$ es Hausdorff, entonces $Y$ también.
**c.** Supongamos $X$ compacto. Mostar que $Y$ es compacto si y solamente si $p$ tiene un número finito de hojas.

Ejercicio 3. Sea $X$ un espacio topológico Hausdorff y sea $G$ un grupo finito (dotado de la topología discreta) actuando de manera continua en $X$. Mostrar si la acción de $G$ es libre, entonces la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/G$ es un revestimiento (para la topología cociente en $X/G$).

Ejercicio 4. Sea
$$\mathbf{PSL}(2;\mathbb{R}) := \mathbf{SL}(2;\mathbb{R})/\{\pm I_2\}.$$
Mostrar que la proyección canónica
$$p : \mathbf{SL}(2;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{PSL}(2;\mathbb{R})$$
es un revestimiento. ¿Cuál es su grupo de automorfismos?

Ejercicio 5. Sean $q_1 : Y_1 \longrightarrow X$ y $q_2 : Y_2 \longrightarrow X$ dos revestimientos simplemente conexos de un espacio topológico $X$ conexo y localmente arco-conexo. Mostar que $Y_1$ y $Y_2$ son isomorfos como revestimientos de $X$.

Ejercicio 6. Mostrar que el grupo de automorfismos del revestimiento
$$p : S_n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}_n = S_n/\{\pm 1\}$$
es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio 7. Mostar que el grupo de automorfismos del revestimiento
$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S_1$$
es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 8. Mostar que el grupo de automorfismos del revestimiento $p : S_1 \longrightarrow S_1$ definido por $p(z) = z^n$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ejercicio 9. Clasificar, salvo isomorfismo, todos los revestimientos conexos de los siguientes espacios topológicos.
**a.** El círculo $S_1$.
**b.** El plano proyectivo real $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$.
**c.** El toro 2-dimensional $S_1 \times S_1$.

Ejercicio 10. Sea $p : Y \longrightarrow X$ un revestimiento arco-conexo. Mostrar que $\pi_1(X;x)$ actúa de manera transitiva en $p^{-1}(\{x\})$.

Ejercicio 11. Sea $G$ un grupo topológico conexo y sea $H$ un sub-grupo normal y discreto. Mostrar que $H$ está incluido en el centro de $G$.