

Hoja de ejercicios 2 : Grupo fundamental

2015-II

FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea G un grupo topológico y sea $\gamma : [0; 1] \rightarrow G$ un lazo basado en el elemento neutro $e \in G$. Mostrar que los caminos $\gamma^{-1} : t \mapsto \gamma(1-t)$ y $\bar{\gamma} : t \mapsto \gamma(t)^{-1}$ son homótopos.

EJERCICIO 2. Mostrar que los siguientes espacios son simplemente conexos.

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para $n \geq 3$.
- $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ para $n \geq 3$ y $0 \leq k \leq n-3$.
- Un conjunto estrellado $E \subset \mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 3. Sea X un espacio topológico arco-conexo. Mostrar que X es simplemente conexo si y solamente si dos caminos cualesquiera con las mismas extremidades son homótopos.

EJERCICIO 4. Sea $c : S_1 \rightarrow X$ una aplicación continua. Se denota $x := c(\mathbf{1})$ donde $\mathbf{1} = (1, 0) \in S_1$.

- Mostrar que si c se extiende a una aplicación continua $\bar{c} : B_2 \rightarrow X$, entonces c es homótopa a una aplicación constante.
- Supongamos ahora que existe una homotopía $H : I \times S_1 \rightarrow X$ entre c y la aplicación constante $f_y \equiv y$, donde y es un punto cualquiera de X (no necesariamente igual a x). Mostrar que la aplicación $\bar{c} : B_2 \rightarrow X$ definida por

$$x \mapsto \begin{cases} y & \text{si } 0 \leq |z| \leq \frac{1}{2} \\ H\left(2-2|z|, \frac{z}{|z|}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \end{cases}$$

es una extensión continua de c a B_2 .

- En la situación de **b**, mostrar que la aplicación

$$G : \begin{array}{ccc} I \times S_1 & \rightarrow & X \\ (s, z) & \mapsto & \bar{c}((1-s)z) + s\mathbf{1} \end{array}$$

es una homotopía de lazos (es decir, relativa al punto de base) entre c y el lazo constante $f_x : S_1 \rightarrow X$ (donde $x = c(\mathbf{1})$).

- Se supone de ahora en adelante que X es arco-conexo. Deducir de lo anterior que X es simplemente conexo si y solamente si cualquier aplicación continua de S_1 a X se extiende a una aplicación continua de B_2 a X .

EJERCICIO 5. Mostrar que si X_1 y X_2 son dos abiertos de un espacio topológico X que cumplen con las hipótesis del teorema de Van Kampen y tal que $X_0 := X_1 \cap X_2$

es simplemente conexo, entonces los homomorfismos canónicos

$$k_i : \pi_1(X_i; x_0) \rightarrow \pi_1(X; x_0),$$

donde $x_0 \in X_0$, son inyectivos.

EJERCICIO 6. Mostrar que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S_1)$ es isomorfo a \mathbb{Z} , donde $S_1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ de la manera habitual.

EJERCICIO 7. Sea $f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un embejamiento, sea $K := f(S_1)$ y sea $S_3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandrov de \mathbb{R}^3 . Sea $B(0; R]$ una bola cerrada de \mathbb{R}^3 tal que $K \subset B(0; R]$. Sea $X_1 := B(0; R+1) \setminus K$ y sea $X_2 := S_3 \setminus B(0; R]$, de tal manera que $X_1 \cup X_2 = (S_3 \setminus K)$ y $X_1 \sim (\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Sea x_0 tal que $\|x_0\| = R + \frac{1}{2}$, de tal manera que $x_0 \in X_0 := X_1 \cap X_2$.

- Mostrar que X_1 y X_2 cumplen con las hipótesis del teorema de Van Kampen en $X := S_3 \setminus K$.
- Deducir de lo anterior que

$$\pi_1(S_3 \setminus K; x_0) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K; x_0).$$

EJERCICIO 8. Sea $z_0 = \mathbf{1} \in S_1$. Sea $T^2 = S_1 \times S_1$ el toro 2-dimensional y sea $x_0 = (z_0, z_0) \in T^2$.

- Dar generadores explícitos de $\pi_1(T^2; x_0)$ y mostrar que ese grupo es un grupo abeliano libre de dos generadores (es decir, isomorfo a \mathbb{Z}^2).
- Se considera el bouquet $X = S_1 \vee_{z_0} S_1$. Utilizando la versión débil del teorema de Van Kampen, dar generadores explícitos α y β de $\pi_1(X; z_0)$.
- Utilizando la versión fuerte del teorema de Van Kampen, mostrar que $\pi_1(X; z_0)$ es el grupo libre generado por α y β , es decir que cada elemento de $\pi_1(X; z_0)$ se escribe de manera única como producto (reducido) $\alpha^{n_1} \beta^{p_1} \dots \alpha^{n_k} \beta^{p_k}$.

d. Se recuerda que $\pi_1(T^2; x_0)$ admite la presentación finita $\langle a, b \mid [a, b] \rangle$. Sea $\Sigma := T^2 \# T^2$. Utilizando el teorema de Van Kampen, mostrar que $\pi_1(\Sigma)$ admite la presentación finita

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle.$$

EJERCICIO 9. Mostrar que un disco menos p puntos no es homeomorfo a un disco menos q puntos si $q \neq p$.