# Hoja de ejercicios 1 : Nociones básicas



Ejercicio 1. Se considera el grupo ortogonal $\mathbf{O}(n+1)$ y la esfera $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
**a.** Mostrar que si $A \in \mathbf{O}(n+1)$ y $x \in S_n$, entonces $Ax \in S_n$.
**b.** Sea $x_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S_n$. Mostrar que el conjunto

$$H := \{A \in \mathbf{O}(n+1) \mid Ax_0 = x_0\}$$

es un sub-grupo cerrado de $\mathbf{O}(n+1)$, isomorfo a $\mathbf{O}(n)$.
**c.** Identificando $\mathbf{O}(n)$ al sub-grupo $H$ de $\mathbf{O}(n+1)$, mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}(n+1) & \longrightarrow & S_n \\ A & \longmapsto & Ax_0 \end{array}$$

induce un homeomorfismo del espacio topológico cociente $\mathbf{O}(n+1)/\mathbf{O}(n)$ sobre $S_n$.
**d.** Mostrar de la misma manera que existen homeomorfismos

$$\mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n) \simeq S_n$$

y

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{U}(n+1)/\mathbf{U}(n) & \simeq & \mathbf{SU}(n+1)/\mathbf{SU}(n) \\ & \simeq & S_{2n+1}. \end{array}$$

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{R}\mathbf{P}_n = S_n/(x \sim -x)$ el espacio proyectivo real $n$-dimensional. Se considera la filtración natural

$$\mathbb{R}\mathbf{P}_0 \subset \mathbb{R}\mathbf{P}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}\mathbf{P}_{n-1} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}_n.$$

**a.** Mostrar que $e^0 := \mathbb{R}\mathbf{P}_0$ es una 0-celda y que, para cualquier $k \in \{1; \ldots ; n\}$, el sub-espacio $e^k := \mathbb{R}\mathbf{P}_k \setminus \mathbb{R}\mathbf{P}_{k-1}$ es una $k$-celda.
**b.** Sea $k \geq 1$ y sea $p_k$ la proyección canónica $p_k : S_{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}_{k-1}$. Mostrar que el espacio topológico $B_k \cup_{p_k} \mathbb{R}\mathbf{P}_{k-1}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}\mathbf{P}_k$.
**c.** Deducir de lo anterior que la descomposición celular $(e^k)_{0 \leq k \leq n}$ define una estructura de $CW$-complejo finito en $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$.
**d.** Precisar, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, cuál es el $k$-esqueleto de $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ en la descomposición celular anterior.
**e.** Estudiar de manera similar el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$.

Ejercicio 3. Sea $I = [0; 1] \subset \mathbb{R}$.
**a.** Mostrar que $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ es homeomorfo al espacio topológico cociente $(I \times I)/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $I \times I$ que identifica los puntos $(s, 0)$ y $(1-s, 1)$ para cualquier $s \in I$, así como los puntos $(0, t)$ y $(1, 1-t)$ para cualquier $t \in I$.
**b.** Deducir de lo anterior la existencia de una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ con dos 0-celdas, dos 1-celdas y una 2-celda.

Ejercicio 4. Sea $I = [0; 1] \subset \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{M} := (I \times I)/\sim$ la cinta de Möbius ($\sim$ es la relación de equivalencia en $I \times I$ que identifica los puntos $(0, t)$ y $(1, 1-t)$, para cualquier $t \in I$). Se denota $p : I \times I \longrightarrow \mathcal{M}$ la proyección canónica.
**a.** Sea $A = p([0; 1] \times \{\frac{1}{2}\}) \subset \mathcal{M}$. Mostrar que $A$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathcal{M}$.
**b.** Deducir de lo anterior que $\mathcal{M}$ tiene el mismo tipo de homotopía del círculo $S_1$.

Ejercicio 5. Mostrar que un toro menos un punto tiene el mismo tipo de homotopía de un bouquet de dos círculos.

Ejercicio 6. Mostrar que $\mathbb{R}^2$ menos un conjunto finito de puntos tiene el mismo tipo de homotopía de un bouquet de círculos.

Ejercicio 7. Sea $(X, \mathcal{E})$ un CW-complejo y, para $k \in \mathbb{N}$, sea $X^k$ el $k$-esqueleto de $X$.
**a.** Supongamos que $X^1$ es conexo. Mostrar que $X$ es conexo.
**b.** Sea $k \geq 2$ y sea $e$ una $k$-celda. Sea $\varphi_e : S_{k-1} \longrightarrow X^{k-1}$ una aplicación característica para $e$. Mostrar que si $B_k \cup_{\varphi_e} X^{k-1}$ es conexo, entonces $X^{k-1}$ es conexo.
*Indicación:* Si $k \geq 2$, $S_{k-1}$ es conexo.
**c.** Deducir de lo anterior que si $X$ es conexo entonces $X^1$ es conexo.
**d.** De forma más general, mostrar que la inclución canónica $X^1 \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $\pi_0(X^1) \simeq \pi_0(X)$.

Ejercicio 8. Mostrar que si $X$ es contraíble, entonces $\pi_0(X) = \{\mathrm{pt}\}$.

Ejercicio 9. Mostrar que si $Y$ es contraíble y $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces $f$ es homótopa a una aplicación constante.

Ejercicio 10. Mostrar que si $f : X \longrightarrow Y$ es homótopa a una aplicación constante y $g : Y \longrightarrow Z$ es continua, entonces $g \circ f$ es homótopa a una aplicación constante.