Examen final

18 de noviembre 2015 — Florent Schaffhauser

Cada pregunta vale 2 puntos.

Ejercicio 1. Consideremos el círculo $S_1 \subset \mathbb{R}^2$. Sea $A = (1,0)$ y $B = (-1,0)$ en S_1 y consideremos los siguientes caminos en S_1:

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & S_1 \\ t & \longmapsto & e^{i\pi t} \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \beta : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & S_1 \\ t & \longmapsto & -e^{i\pi t} \end{array} \right. .$$

Con lo anterior podemos definir una estructura de CW-complejo finito en S_1 que tiene:

- dos 0-celdas A y B,
- dos 1-celdas e y e' cuyas respectivas clausuras son $\mathrm{Im}\,\alpha$ e $\mathrm{Im}\,\beta$.

Se denotará $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ el esqueleto de S_1 para esa estructura de CW-complejo.

a. Mostrar que el complejo celular

$$0 \longrightarrow H_1(X_1, X_0; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\Delta} H_0(X_0; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

asociado a la estructura de CW-complejo definida anteriormente en S_1 se puede identificar con

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\alpha] \oplus \mathbb{Z}[\beta] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}A \oplus \mathbb{Z}B \longrightarrow 0$$

donde la matriz de D en las bases propuestas es $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Indicación: Δ es el homomorfismo de conexión de la sucesión exacta larga del par (X_1, X_0).

b. Determinar $\ker D$ y mostrar que $H_1(S_1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}([\alpha] + [\beta])$.

Ejercicio 2. Sea $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera 2-dimensional y sea $N = (0,0,1) \in S_2$.

a. Utilizando la sucesión exacta larga de un par topológico, mostrar que existe un isomorfismo

$$u_1 : H_2(S_2) \xrightarrow{\simeq} H_2(S_2, S_2 \setminus \{N\}).$$

b. Sea $S = (0,0,-1) \in S_2$. Utilizando la propiedad de excisión, mostrar que existe un isomorfismo

$$u_2 : H_2(S_2 \setminus \{S\}, S_2 \setminus \{N; S\}) \xrightarrow{\simeq} H_2(S_2, S_2 \setminus \{N\}).$$

c. Sea B_2 la bola cerrada 2-dimensional, identificada con el hemisferio norte de S_2. Sea $S_1 = \partial B_2$ el ecuador de S_2. Mostrar que existe un isomorfismo

$$u_3 : H_2(B_2, S_1) \xrightarrow{\simeq} H_2(S_2 \setminus \{S\}, S_2 \setminus \{N; S\}).$$

d. Mostrar que existe un isomorfismo

$$u_4 : H_2(B_2, S_1) \xrightarrow{\simeq} H_1(S_1).$$

e. Sea $u := u_4 u_3^{-1} u_2^{-1} u_1$ el isomorfismo explícito $H_2(S_2) \xrightarrow{u} H_1(S_1)$ obtenido al componer los isomorfismos anteriores de manera adecuada. Sea

$$r : \begin{array}{ccc} S_2 & \longrightarrow & S_2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (-x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

la reflexión con respecto al plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x = 0$.

Mostrar que $r(S_1) \subset S_1$ y que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_2(S_2) & \xrightarrow{u} & H_1(S_1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_2(r)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_1(r|_{S_1})} \\ H_2(S_2) & \xrightarrow{u} & H_1(S_1) \end{array}$$

es conmutativo.

Ejercicio 3. Un *campo vectorial* en la esfera 2-dimensional $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ es una aplicación continua $s : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $x \in S_2$, $s(x) \perp x$ en $\mathbb{R}^3$. El propósito del ejercicio es mostrar que cualquier campo vectorial en S_2 se anula en al menos un punto (resulta conocido como el *teorema de la bola peluda*). La herramienta que utilizaremos es la noción de *grado* de una aplicación continua $f : S_2 \longrightarrow S_2$, vista en clase. Se denotará $\mathrm{gr}(f) \in \mathbb{Z}$ el grado de la aplicación f.

Sea $s : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en S_2 y supongamos que, para todo $x \in S_2$, $s(x) \neq 0$. Sea entonces

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} S_2 & \longrightarrow & S_2 \\ x & \longmapsto & \frac{s(x)}{\|s(x)\|} \end{array} \right.$$

y

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] \times S_2 & \longrightarrow & S_2 \\ x & \longmapsto & \cos(\pi t)\, x + \mathrm{sen}(\pi t)\, \tau(x) \end{array} \right. .$$

a. Mostrar que τ y F en efecto toman sus valores en S_2 y que F es una homotopía entre Id_{S_2} y la aplicación antipodal

$$a : \left\{ \begin{array}{ccc} S_2 & \longrightarrow & S_2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (-x_1, -x_2, -x_3) \end{array} \right. .$$

Ya que dos aplicaciones continuas homótopas tienen el mismo grado, la pregunta **a** muestra que la aplicación antipodal en S_2 tiene grado igual al de la identidad, es decir 1. Por lo tanto, llegaremos a una contradicción si logramos demostrar que el grado de $a : S_2 \longrightarrow S_2$ de hecho es distinto de 1 y eso permitirá concluir que el campo vectorial s, el cual por hipótesis no se anula en S_2, no existe.

b. Deducir de la pregunta **e** del Ejercicio **2** que el grado de la aplicación r ahí definida es igual a (-1).

Indicación: Se podrá mostrar, utilizando el generador $\alpha + \beta$ de $H_1(S_1)$ construido en el Ejercicio **1**, que $r|_{S_1}$ tiene grado -1.

c. Ahora vamos a mostrar que el grado de una aplicación continua $f : S_2 \longrightarrow S_2$ inducida por una transformación ortogonal $g \in \mathbf{O}(3)$ de $\mathbb{R}^3$ es igual a $\det g$. Esto lo podremos aplicar en particular a la aplicación antipodal.

Sea entonces $g \in \mathbf{O}(3)$. Sabemos que $\det g = \pm 1$ y que:

- Si $\det g = +1$ entonces g es ortogonalmente conjugada a una matriz de la forma

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  donde $\theta \in \mathbb{R}$.
- Si $\det g = -1$ entonces $r \circ g$, donde r es la reflexión definida anteriormente, es conjugada a una matriz de la forma A_θ con $\theta \in \mathbb{R}$ (pues $\det(r \circ g) = (\det r)(\det g) = +1$).

A partir de eso, mostrar que $g \in \mathbf{O}(3)$ tiene grado igual a $\det g$ cuando visto como aplicación continua de S_2 a S_2 y aplicar eso a la aplicación antipodal para concluir.

Indicación: Mostrar que la transformación de S_2 inducida por A_θ es homótopa a la identidad y utilizar (sin volverlas a desmostrar) las siguientes propiedades del grado:

- $\mathrm{gr}(f_1 \circ f_2) = \mathrm{gr}(f_1)\mathrm{gr}(f_2)$. En particular, si f es invertible y g es arbitraria, $\mathrm{gr}(f \circ g \circ f^{-1}) = \mathrm{gr}(g)$.

- Dos aplicaciones continuas homótopas tienen el mismo grado.
- Como se vio en la pregunta **b**, la aplicación r tiene grado (-1).

d. *Bono.* Mostrar que, si se considera el problema análogo en S_1, entonces la aplicación continua $s : (x_1, x_2) \longmapsto (-x_2, x_1)$ es un campo vectorial siempre no nulo en S_1. Mostrar también que la aplicación antipodal en S_1 tiene grado 1.

Meta-bono. Meditar la siguiente afirmación: "En la superficie de la Tierra, siempre hay un punto en el cual la velocidad del viento es nula".