Solución del parcial 3

Ejercicio 1. a. El volumen del paralelepipedo de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ es igual a

$$|\det(v_1, v_2, v_3)| = |\det \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}| = |(5 \times (-4) - 6 \times (-3))| = |-2| = 2.$$

b. Las columnas de la matriz A son las coordenadas, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, de los vectores de la familia (v_3, v_2, v_1) de la pregunta anterior, por lo que $\det A = \det(v_3, v_2, v_1) = -\det(v_1, v_2, v_3) = -(-2) = 2$. Ya que $\det A \neq 0$, se tiene que A es invertible.

Ejercicio 2. a. Los valores propios de $A \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ son las raíces del polinimio característico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Despejando ese determinante con respecto a la segunda columna y factorizando, se obtiene

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 6 & 4-\lambda & -3 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 4)^2.$$

Por lo tanto, A tiene 2 valores propios distintos, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$.

b. A representa una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión 3 y tiene dos valores propios distintos. Por lo tanto, para demostrar que A es diagonalizable, es suficiente, por un teorema del curso, mostrar que A tiene un sub-espacio propio de dimensión 2. Sea entonces $E_2 := \ker(A - 4I_3)$ el sub-espacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 4$ de A. Se tiene $(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la cual tiene rango 1 (tiene una columna nula y la primera columna es (-2) veces la tercera). Por el teorema del rango, $\dim \ker(A - 4I_3) = 3 - \operatorname{rg}(A - 4I_3) = 3 - 1 = 2$. Por lo tanto, (la suma de las dimensiones de los sub-espacios propios de A es igual a la dimensión del espacio y) A es diagonalizable.

Ejercicio 3. Se consideran los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

a. Los vectores v_1 y v_2 son ambos no nulos y no son proporcionales. Por lo tanto, la familia (v_1, v_2) es libre.

b. Por definición del producto vectorial, se tiene $\det(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2 \,|\, v_3) = (v_1 \times v_2 \,|\, v_1 \times v_2) = \|v_1 \times v_2\|^2$. Ya que (v_1, v_2) es una familia libre, $v_1 \times v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Por lo tanto, $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ y la familia (v_1, v_2, v_3) es una base de $\mathbb{R}^3$.

c. El área del paralelograma de $\mathbb{R}^3$ generado por la familia (v_1, v_2) es igual a $\|v_1 \times v_2\|$. Calculemos $v_1 \times v_2$. Se tiene

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $\|v_1 \times v_2\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

d. La reflexión con respecto al plano $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ es la transformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ determinada por $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$ y $T(v_1 \times v_2) = v_1 \times v_2$. Ya que $v_3 = v_1 \times v_2$, lo anterior dice que la matriz de la transformación lineal T en la base (v_1, v_2, v_3) es la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

e. Para mostrar que C es inverstible y calcular su inversa, se forma la matriz aumentada $[C|I_3]$. La forma escalón reducida de esa matriz es

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 0 \end{array}\right]$$

por lo que C en efecto es invertible y $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

f. Ya que la matriz de T en la base (v_1, v_2, v_3) es D y que las columnas de la matriz C representan las coordenadas, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, de los vectores (v_1, v_2, v_3), tenemos que la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = CDC^{-1} = (CD)C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$