Parcial 3 (Duración: 1h20)

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos.**

Ejercicio 1. a. Calcule el volumen del paralelepipedo de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b. Muestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 \\ -6 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es invertible.

Ejercicio 2. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Determine los valores propios de A.

b. Muestre que A es diagonalizable.

Ejercicio 3. Se consideran los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

a. Muestre que la familia (v_1, v_2) es una familia libre de vectores de $\mathbb{R}^3$.

b. Sea $v_3 := v_1 \times v_2$ el producto vectorial de v_1 y v_2. Muestre que la familia (v_1, v_2, v_3) es una base de $\mathbb{R}^3$.

c. Calcule el área del paralelograma de $\mathbb{R}^3$ generado por la familia (v_1, v_2).

d. Sea $\mathcal{P}$ el plano generado por los vectores v_1 y v_2 y sea T la reflexión con respecto al plano $\mathcal{P}$. Muestre que la matriz de la transformación lineal T en la base (v_1, v_2, v_3) es la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

e. Se considera la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Muestre que C es invertible y calcule C^{-1}.

f. Muestre que la matriz de la transformación lineal T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bono. Sea E un sub-espacio vectorial y sea $T : E \longrightarrow E$ una transformación lineal. Muestre que, para todo escalar λ, el conjunto $E_\lambda := \{v \in E \mid T(v) = \lambda v\}$ es un sub-espacio vectorial de E.