Solución del parcial 2

Ejercicio 1

a. La base canónica de $\mathbb{R}_2[X]$ es $(1, X, X, X^2)$, la cual tiene tres vectores. Como la dimensión de un espacio vectorial es igual al número de vectores en cualquier base de ése, se tiene que $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.

b. Consideremos la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cuyas columnas representan las coordenadas de los vectores de la familia (P_1, P_2, P_3) en la base canónica $(!, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. La forma escalón reducida de C es $C_0 = I_3$, así que A es invertible, lo cual es equivalente a decir que (P_1, P_2, P_3) es una base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Otro método: Ya que sabemos que $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, es suficiente, para mostrar que la familia(P_1, P_2, P_3) es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, mostrar que esa familia es libre. Supongamos entonces $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, es decir $(3\lambda_2 + 3\lambda_3)X^2 + (2\lambda_1)X + (3\lambda_2 - 3\lambda_3) = 0$. Eso implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Por lo tanto, la familia (P_1, P_2, P_3) en efecto es libre.

c. La inversa de la matrix C anterior es $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ y podemos hallar las coordenadas de Q en la base (P_1, P_2, P_3) resolviendo el sistema $Cv = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuyo segundo miembro representa las coordenadas de $Q = 6 + 4X$ en la base canónica $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Se obtiene entonces las coordenadas de Q en la base (P_1, P_2, P_3) son $C^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, es decir que $Q = 2P_1 + 3P_2 - 3P_3$.

Ejercicio 2

a. Por definición de los sistemas planteados, se buscan (α, β) y (λ, μ) tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir que se busca la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se encuentra:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ y $e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

b. Utilizando el punto anterior, viene

$$T(e_1) = \frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{2}T(v_2) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_2$$

y

$$T(e_2) = -\frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{2}T(v_2) = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1.$$

Por lo tanto, la matriz de T en la base (e_1, e_2) es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y se tiene

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

para la expresión general de T.

Ejercicio 3

a. Es cuestión de verificar que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y $T\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, lo cual es inmediato visto la expresión de T. La matriz A de T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es, por definición, la matriz cuyas columnas representan las coordenadas de los vectores de la familia $\left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calculando a partir de la expresión general de T, se halla $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

b. El rango de T (es decir, la dimensión de la imagen de T) es igual al rango de la matriz A de T. La matriz A tiene dos columnas y esas dos columnas son no proporcionales. Por lo tanto, el rango de A es igual a 2.

c. Por el teorema del rango, se tiene $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^2 - \operatorname{rg} T = 2 - 2 = 0$.

Ejercicio 4

Son preguntas del curso.