Parcial 2 (Duración: 1h20)

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale** 2 **puntos.**

Ejercicio 1

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[X] = \{a_2X^2 + a_1X + a_0 : \forall\, k \in \{0;1;2\}, a_k \in \mathbb{R}\}$ de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2.

a. Justificando su respuesta, muestre que la dimensión de $\mathbb{R}_2[X]$ es igual a 3.

b. Muestre que la familia $(P_1, P_2, P_3) = (2X, X^2 + 1, X^2 - 1)$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c. Halle las coordenadas del vector $Q = 4X + 6$ en la base (P_1, P_2, P_3).

Ejercicio 2

Sea R la recta de ecuación $y = -x$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta R: $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Se denotará a continuación $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La base canónica de $\mathbb{R}^2$ se denotará (e_1, e_2).

a. Halle coeficentes (α, β) y (λ, μ) tales que $\alpha v_1 + \beta v_2 = e_1$ y $\lambda v_1 + \mu v_2 = e_2$.

b. Determine la matriz A de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (es decir, la matriz estándar de T) y la expresión general de $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3

Sea T la aplicación

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \\ -4x - 2y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

a. Muestre que T es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ y determine la matriz estándar de T (es decir, la matriz de T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

b. Calcule el rango de T.

c. Calcule la dimensión del núcleo de T.

Ejercicio 4

a. Sea $T : E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales E_1 y E_2 y sea $\ker T$ el núcleo de T. Mostrar que $\ker T$ es un sub-espacio vectorial de E_1.

b. Sea $T : E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales E_1 y E_2 y sea $\operatorname{Im} T$ la imagen de T. Mostrar que $\operatorname{Im} T$ es un sub-espacio vectorial de E_2.