Solución del parcial 1

Ejercicio 1

a. La matriz aumentada del sistema (S) es

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 5 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

La forma escalón reducida de esa matriz es

$$[A_0|b_0] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, el vector $v_0 = \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema (S).

b. Utilizando a forma escalón reducida de la matriz A hallada en **a**, se obtiene que la solución general del sistema homogéneo $Av = 0$ es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5s & +3t \\ -2s & +t \\ s & \\ & t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con s y t en $\mathbb{R}$.

c. Utilizando los resultados de las preguntas **a** y **b**, se obtiene que la solución general del sistema $Av = b$ es

$$\begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con s y t en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2

a. Para hallar una base del sub-espacio $F = < v_1, v_2, v_3 >$ generado por la familia (v_1, v_2, v_3), se forma la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(cuyas columnas representan la familia (v_1, v_2, v_3)) y se reduce esa matriz. La forma escalón reducida de A es

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las primeras dos columnas de A_0 contienen un pivote y la tercera no. Por lo tanto, los vectores v_1 y v_2 forman una base de F.

b. Por la forma escalón reducida de A hallada en **a**, se tiene que $v_3 = 3v_1 - 2v_2$.

c. El sub-espacio F de $\mathbb{R}^4$ tiene una base (v_1, v_2) conformada de dos vectores. Por lo tanto, $\dim F = 2$.

Ejercicio 3

a. Para mostrar que A es invertible y hallar su inversa, se forma la matriz aumentada

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La forma escalón reducida de esa matriz es

$$[A_0|B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Ya que $A_0 = I_3$, se tiene que A es invertible y que $A^{-1} = B$.

b. Si calculamos $v = A^{-1}b$ para $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se obtiene (la primera columna de A^{-1}) $v = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, así que, por definición del sistema $Av = b$, se tiene

$$-7\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

y b es en efecto combinación lineal de las columnas de A, con coeficientes (-7), 3 y 3.

Ejercicio 4

Son preguntas del curso.