Tarea 2 : Para entregar el 5 de mayo

2014-I — Florent Schaffhauser

Cada pregunta vale 2 puntos.

Ejercicio 1. Sea η la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\mathrm{ch} u \cos v, \mathrm{ch} u \,\mathrm{sen}\, v, u) \end{array}$$

a. Mostrar que la traza $\widehat{\eta} \subset \mathbb{R}^3$ de η es una superficie diferenciable de clase C^2.
b. Hallar la expresión local de la primera forma fundamental de $\widehat{\eta}$ y mostrar que $\eta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \widehat{\eta}$ es una aplicación conforme.
c. Hallar la expresión local de la segunda forma fundamental de $\widehat{\eta}$.
d. Calcular la curvatura de Gauss y la curvatura promedia de $\widehat{\eta}$.

Ejercicio 2. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sea

$$\Gamma := \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid z = f(x,y)\}.$$

a. Mostrar que Γ es una superficie diferenciable de clase C^2 y hallar las expresiones locales de la primera y la segunda forma fundamentale de Γ en la parametrización natural

$$\eta : \Omega \ni (x,y) \longmapsto (x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3.$$

b. Sea $K : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ la curvatura de Gauss de Γ. Mostrar que

$$K \circ \eta = \frac{(\partial^2_{xx} f)(\partial^2_{yy} f) - (\partial^2_{xy} f)^2}{(1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2)^2}.$$

c. Sea $H : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ la curvatura promedia de Γ. Mostrar que

$$H \circ \eta = \frac{(1 + (\partial_y f)^2)\partial^2_{xx} f - 2(\partial_x f)(\partial_y f)\partial^2_{xy} f + (1 + (\partial_x f)^2)\partial^2_{yy} f}{2(1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2)^{3/2}}.$$

Ejercicio 3. (Bono).
Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $\eta : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \eta(u,v) \end{array}$ una inmersión de clase C^2 que es un homeomorfismo sobre su imagen. Se denota $\Sigma := \widehat{\eta}$ la superficie diferenciable de clase C^2 así definida. Sea $N : \Sigma \longrightarrow S^2$ la aplicación de Gauss de Σ y sea $\nu := N \circ \eta$. Mostrar que la curvatura de Gauss $K : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ de Σ cumple con la relación

$$K \circ \eta = \frac{\det(\partial_u \nu, \partial_v \nu, \nu)}{\|\partial_u \eta \times \partial_v \eta\|} \text{ en } \Omega.$$

Ejercicio 4. (Otro bono posible).
Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación. Se dice que f es *holomorfa* en Ω si f es diferenciable en Ω y si su jacobiana en cualquier punto de Ω es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con a y b reales.
a. Mostrar que si f es de clase C^1 en Ω y holomorfa en ese abierto[1] y si además $f'(x_0,y_0) \neq 0$ en algún punto (x_0,y_0) de Ω, entonces existe una vecindad abierta V de (x_0,y_0) tal que $f|_V$ es un C^1-difeomorfismo sobre su imagen. Mostrar que, además, el difeomorfismo inverso es holomorfo.
b. Mostar que si f es de clase C^2 y holomorfa en Ω y si además $f'(x,y) \neq 0$ en Ω, entonces existe una función $\lambda : \Omega \longrightarrow]0;+\infty[$ de clase C^1 tal que

$$\forall (x,y) \in \Omega, \forall (v,w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \big(f'(x,y)\cdot v | f'(x,y) \cdot w\big) = \lambda(x,y)\big(v|w\big)$$

(es decir que f es una aplicación conforme).

[1] Se ve en el curso de variable compleja que, de hecho, si f es holomorfa en Ω, entonces f' es holomorfa en Ω. En particular, si f es holomorfa, es automáticamente de clase C^∞ en Ω.