Tarea 1 : Para entregar el 14 de marzo

2014-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Se dice que un arco parametrizado $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es *cerrado* si es no constante y si existe $T > 0$ tal que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t+T) = \gamma(t)$$

(es decir, γ es periódico de periodo T).

Sea ahora $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arco plano unitario cerrado de clase C^2 y sea $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ su función de curvatura. Se denota $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una determinación C^1 del ángulo entre el vector $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ y el arco η, es decir que, para cualquier $s \in J$, $\eta'(s) = (\cos(\varphi(s)), \operatorname{sen}(\varphi(s)))$.

a. Recordar la relación entre φ y c.

b. Mostrar que $\int_0^T c(s)\, ds$ es un múltiplo *entero* de 2π.

Ejercicio 2. Sea $\eta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$un arco plano unitario y biregular de clase C^2 y sea $c : J \longrightarrow \mathbb{R}$ su función de curvatura. Sea $s_0 \in J$ y sean (α, β) las coordenadas, en el marco de Frénet de η en s_0, de un punto cualquiera del plano. Se dice que un círculo de ecuación $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2$ en el marco de Frénet de η en s_0 es *osculador* a η en s_0 si la función

$$f : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \big(x(s)-\alpha\big)^2 + \big(y(s)-\beta\big)^2 - R^2 \end{array}$$

donde $(x(s), y(s))$ **son las coordenadas de** $\eta(s)$ **en el marco de Frénet de** η **en** s_0, cumple con las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f(s_0) & = & 0 \\ f'(s_0) & = & 0 \\ f''(s_0) & = & 0 \end{array} \right.$$

a. Mostrar que el círculo de ecuación $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2$ es osculador a η en s_0 si y sólo si $R = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha = 0$ y $\beta = \dfrac{1}{c(s_0)}$ (en particular, el círculo osculador existe y es único).

b. Precisar la posición del centro y el radio del círculo osculador. ¿Cuál es la curvatura de aquel círculo?

Ejercicio 3. Sea $\eta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco torcido unitario y biregular de clase C^3 y sea $c_\eta : J \longrightarrow \mathbb{R}$ su función de curvatura. Sea s_0 un punto de J y sea $P_0 := \eta(s_0) + \operatorname{Vect}(\eta'(s_0, \eta''(s_0))$ el plano osculador de η en s_0. Sea $(T(s), N(s))$ el marco de Frénet de η en $s \in J$.

a. Mostar que $P_0 = \eta(s_0) + \operatorname{Vect}(T(s_0), N(s_0))$.

b. Sea $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de η a P_0. Para cualquier $s \in J$, expresar $\gamma(s)$ bajo la forma $\eta(s_0) + a(s)T(s_0) + b(s)N(s_0)$, donde a y b son funciones de clase C^3 en J.

c. Mostar que γ es un arco de clase C^3 en J que es biregular en una vecindad abierta de s_0 y cuya curvatura en s_0 es igual a $c_\eta(s_0)$.

Ejercicio 4. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, se pone $e_r(\theta) := (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y se considera el arco parametrizado

$$\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & f(\theta)\, e_r(\theta) = \big(f(\theta)\cos(\theta), f(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\big) \end{array} .$$

a. Mostrar que γ es un arco parametrizado de clase C^2 y que $\gamma' = f'e_r + fe'_r$. Deducir de ello que γ es regular en $\theta \in I$ si y sólo si $f(\theta)$ y $f'(\theta)$ no son simultáneamente nulos.

b. Supongamos γ regular. Mostar que la función de curvatura de γ es

$$c = \frac{f^2 + 2(f')^2 - ff''}{\left(f^2 + (f')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

c. Calcular la longitud y la curvatura (en los puntos regulares) de la cardioide (la curva de ecuación polar $r = f(\theta)$ con $\theta \in [0; 2\pi]$ y $f(\theta) = 1 + \cos\theta$).

Ejercicio 5. (Bono). Sea W un abierto de $\mathbb{R}^2$, sea $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $X := f^{-1}(\{0\})$. Se supone que $\forall (x, y) \in W \cap X$, $\partial_y f(x, y) \neq 0$. Utilizando el teorema de las funciones implícitas, mostrar que la función de curvatura de la curva de ecuación $f(x, y) = 0$ en W es igual, en valor absoluto, a

$$\frac{(\partial_y f)^2 \partial^2_{xx} f - 2(\partial_x f)(\partial_y f)\partial^2_{xy} f + (\partial_x f)^2 \partial^2_{yy} f}{\left((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

o, de manera equivalente, a $\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)$ (la divergencia del gradiente normalizado de f).