Solución de la tarea 1

2014-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. a. Ya que η es unitario, se tiene, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\varphi'(s) = c(s)$ donde φ una determinación C^1 del ángulo entre el vector $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ y el arco η y c es la función de curvatura de η.

b. Se tiene $\int_0^T c(s)\,ds = \int_0^T \varphi'(s)\,ds = \varphi(T) - \varphi(0)$. Ya que η es periódico de periodo T, η' también (se obtiene derivando la relación $\eta(s+T) = \eta(s)$, que vale para cualquier $s \in \mathbb{R}$). Luego, por definición de φ, se tiene que, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\cos(\varphi(s+T)) = \cos(\varphi(s))$ y $\mathrm{sen}(\varphi(s+T)) = \mathrm{sen}(\varphi(s))$. En particular, para $s = 0$, $\cos(\varphi(T)) = \cos(\varphi(0))$ y $\mathrm{sen}(\varphi(T)) = \mathrm{sen}(\varphi(0))$, por lo que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(T) = \varphi(0) + k2\pi$.

Ejercicio 2. a. El círculo de ecuación $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2$ es osculador a η en s_0 si y sólo si se cumplen las condiciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} \big(x(s_0)-\alpha\big)^2 + \big(y(s_0)-\beta\big)^2 & = & R^2 \\ 2\big(x(s_0)-\alpha\big)x'(s_0) + 2\big(y(s_0)-\beta\big)y'(s_0) & = & 0 \\ 2\big(x'(s_0)\big)^2 + 2\big(x(s_0)-\alpha\big)x''(s_0) + 2\big(y'(s_0)\big)^2 + 2\big(y(s_0)-\beta\big)y''(s_0) & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Pero, por definición del marco de Frénet de un arco unitario, se tiene

$$x(s_0) = y(s_0) = 0, x'(s_0) = 1, y'(s_0) = 0, x''(s_0) = 0 \text{ y } y''(s_0) = c(s_0).$$

Por lo tanto, el sistema (2.1) es quivalente a

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2, -2\alpha = 0 \text{ y } 2 - 2\beta c(s_0) = 1.$$

Ya que γ es biregular en s_0, $c(s_0) \neq 0$ y el sistema anterior es equivalente a

$$\alpha = 0, \beta = \frac{1}{c(s_0)} \text{ y } R = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{|c(s_0)|}.$$

b. El círculo osculador a η en s_0 tiene su centro a la normal a η en s_0, en el punto de coordenadas $(0, \frac{1}{c(s_0)})$ en el marco de Frénet. En particular, la curvatura de aquel círculo es igual a $\frac{1}{c(s_0)}$ (la posición del centro en la normal permite definir una curvatura con signo).

Ejercicio 3. a. Ya que η es unitario y biregular, $T(s_0) = \eta'(s_0)$ y $N(s_0) = \frac{1}{c(s_0)}\eta''(s_0)$. Por lo tanto $\mathrm{Vect}(T(s_0), N(s_0)) = \mathrm{Vect}(\eta'(s_0), \eta''(s_0))$.

b. Para cualquier $s \in J$, la proyección ortogonal de $\eta(s) \in \mathbb{R}^3$ al plano $P_0 = \eta(s_0) + \mathrm{Vect}(T(s_0), N(s_0))$ es el vector

$$\gamma(s) := \eta(s_0) + \underbrace{\big(\eta(s) - \eta(s_0) \,|\, T(s_0)\big)}_{=:a(s)} T(s_0) + \underbrace{\big(\eta(s) - \eta(s_0) \,|\, N(s_0)\big)}_{=:b(s)} N(s_0).$$

Las funciones a y b así definidas son de clase C^3 en J pues η es de clase C^3 en J.

Se puede observar que $\gamma(s)$ así definido sí pertenece al plano osculador a η en s_0 y además satisface $\gamma(s_0) = \eta(s_0)$.

c. El arco γ definido como en **b** es de clase C^3 porque sus componentes son de clase C^3 y se tiene, para cualquier $s \in J$,

$$\gamma'(s) = \big(\eta'(s) \,|\, T(s_0)\big)T(s_0) + \big(\eta'(s) \,|\, N(s_0)\big)N(s_0)$$

y

$$\gamma''(s) = \big(\eta''(s) \,|\, T(s_0)\big)T(s_0) + \big(\eta''(s) \,|\, N(s_0)\big)N(s_0).$$

En particular,

$$\gamma'(s_0) = \big(\eta'(s_0) \,|\, T(s_0)\big)T(s_0) + \big(\eta'(s_0) \,|\, N(s_0)\big)N(s_0) = \eta'(s_0)$$

pues $(T(s_0), N(s_0))$ es una base ortonormal de P_0. De la misma manera

$$\gamma''(s_0) = \big(\eta''(s_0) \,|\, T(s_0)\big)T(s_0) + \big(\eta''(s_0) \,|\, N(s_0)\big)N(s_0) = \eta''(s_0)$$

así que

$$\gamma'(s_0) \wedge \gamma''(s_0) = \eta'(s_0) \wedge \eta''(s_0) \neq 0$$

pues η es biregular en s_0. Por continuidad del producto vectorial, $\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \neq 0$ para cualquier s en una vecindad abierta de s_0. Eso significa que γ es biregular en esa vecindad abierta de s_0. Además, la curvatura de γ en s_0 es igual a

$$\frac{\|\gamma'(s_0) \wedge \gamma''(s_0)\|}{\|\gamma'(s_0)\|^3} = \frac{\|\eta'(s_0) \wedge \eta''(s_0)\|}{\|\eta'(s_0)\|^3} = c_\eta(s_0).$$

Ejercicio 4. a. El arco $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 pues ambas sus componentes son de clase C^2 como productos de funciones de clase C^2. Se tiene, $\forall \theta \in I$,

$$\gamma'(\theta) = \big(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta, f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta\big) = f'(\theta)e_r(\theta) + f(\theta)e_r'(\theta).$$

El arco γ es regular en $\theta \in I$ si y solamente si $\|\gamma'(\theta)\| \neq 0$. Pero, $\forall \theta \in I$, $\|\gamma'(\theta)\| = (f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2$. Luego, γ es regular en θ si sy solamente si $f(\theta)$ y $f'(\theta)$ no son simultáneamente nulos.

b. Se tiene, $\forall \theta \in I$, $c(\theta) = \dfrac{\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))}{\|\gamma'(\theta)\|^3}$ con $\gamma' = f'e_r + fe_r'$ y $\gamma'' = f''e_r + 2f'e_r' + fe_r''$. Ya que $e_r'' = -e_r$ y $\det(e_r, e_r') = 1$, se tiene

$$\det(\gamma, \gamma') = \begin{vmatrix} f' & f'' - f \\ f & 2f' \end{vmatrix} = f^2 + 2(f')^2 - ff''$$

luego

$$c = \frac{f^2 + 2(f')^2 - ff''}{\big(f^2 + (f')^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

c. Para la cardioide $r = 1 + \cos\theta$, se tiene

$$\|\gamma'(\theta)\| = (1 + \cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)^2 = 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Por lo tanto, la longitude de la cardioide es

$$\int_0^{2\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = 8.$$

Por la preguntra **a**, los puntos regulares de la cardioide son los puntos $\theta \in [0; 2\pi] \setminus \{\pi\}$. En tal punto θ, se tiene, por la pregunta **b** :

$$\begin{aligned} c(\theta) &= \frac{(1+\cos\theta)^2 + 2(-\operatorname{sen}\theta)^2 - (1+\cos\theta)(-\cos\theta)}{\left(2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right)^3} \\ &= \frac{3(1+\cos\theta)}{\left(2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right)^3} \\ &= \frac{6\cos^2\frac{\theta}{2}}{8\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^3} \\ &= \frac{3}{4\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. Sea $(x_0, y_0) \in W \cap X$, donde $X := f^{-1}(\{0\})$. Ya que f es de clase C^2 y que $\forall (x, y) \in W \cap X$, $\partial_y f(x, y) \neq 0$, el teorema de las funciones implícitas permite afirmar que existe una función φ de clase C^2 en una vecindad abierta $W_0 = U_0 \times V_0$ de (x_0, y_0) en W tal que, en esa vecindad, $f(x, y) = 0$ si y solamente si $y = \varphi(x)$ (es decir que $W_0 \cap X$ es la gráfica $\mathrm{Gr}(\varphi)$ de la función φ). En particular, utilizando la ecuación $f(x, \varphi(x)) = 0$ y derivándola dos veces en U_0, viene

$$\forall x \in U_0, \partial_x f\big(x, \varphi(x)\big) + \varphi'(x)\partial_y f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$$

es decir, en W_0 (con un lígero abuso de notación para φ', que sólo se evalúa en $x \in U_0$),

$$\partial_x f + \varphi' \partial_y f = 0 \tag{5.1}$$

y, $\forall x \in U_0$,

$$\begin{aligned}
&\partial^2_{xx} f\big(x, \varphi(x)\big) + \varphi'(x) \partial^2_{yx} f\big(x, \varphi(x)\big) + \varphi''(x) \partial_y f\big(x, f(x)\big) \\
&+\varphi'(x)\, \partial^2_{xy} f\big(x, \varphi(x)\big) + \big(\varphi'(x)\big)^2 \partial^2_{yy}\big(x, \varphi(x)\big) = 0,
\end{aligned}$$

es decir, en W_0,

$$\partial^2_{xx} f + 2\varphi' \partial_{xy} f + \varphi'' \partial_f + (\varphi')^2 \partial^2_{yy} f = 0. \tag{5.2}$$

Pero sabemos que la función de curvatura de la curva representada por la gráfica de φ es igual, en valor absoluto, a

$$\frac{\varphi''}{\big(1 + (\varphi')^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Además, a partir de (5.1) y (5.2), podemos calcular φ' y φ'' en función de las derivadas parciales de f :

$$\forall x \in U_0, \varphi'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}\big(x, \varphi(x)\big)$$

luego

$$\big(1 + (\varphi')^2\big)^{\frac{3}{2}} = \frac{\big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2\big)^{\frac{3}{2}}}{(\partial_y f)^3}$$

y

$$\begin{aligned}
(\partial_y f)\varphi'' &= -\partial^2_{xx} f - 2\varphi' \partial^2_{xy} f - (\varphi')^2 \partial^2_{yy} f \\
&= -\partial^2_{xx} f + 2\frac{\partial_x f}{\partial_y f} \partial^2_{xy} f - \frac{(\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^2} \partial^2_{yy} f
\end{aligned}$$

(todo evaluado en el punto $(x, \varphi(x)) \in W_0 \cap X$) luego

$$\varphi'' = -\frac{(\partial_y f)^2 \partial^2_{xx} f - 2(\partial_x f)(\partial_y f) \partial^2_{xy} f + (\partial_x f)^2 \partial^2_{yy} f}{(\partial_y f)^3}.$$

Por lo tanto, se tiene que la curvatura de la curva de ecuación $f(x, y) = 0$ en W es igual, en valor absoluto, a

$$-\frac{\varphi''}{\big(1 + (\varphi')^2\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\partial_y f)^2 \partial^2_{xx} f - 2(\partial_x f)(\partial_y f) \partial^2_{xy} f + (\partial_x f)^2 \partial^2_{yy} f}{\big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Falta ver que lo anterior es igual a la divergencia del gradiente normalizado de f, es decir a $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)$. Recordemos que la divergencia de un campo vectorial $V : (x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y))$ es

$$\operatorname{div} V = \partial_x u + \partial_y v$$

(la traza de la jacobiana de V visto como aplicación diferenciable). Aquí, calculemos por ejemplo $\partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}} \partial_x f\right)$. Se tiene

$$\partial_x \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}} \partial_x f\right) = \frac{(\partial_y f)^2 \partial^2_{xx} f - (\partial_x f)(\partial_y f) \partial^2_{xy} f}{\big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Intercambiando el papel de x y y viene

$$\partial_y \left(\frac{1}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}} \partial_y f\right) = \frac{(\partial_x f)^2 \partial^2_{yy} f - (\partial_x f)(\partial_y f) \partial^2_{xy} f}{\big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Luego

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right) = \frac{(\partial_y f)^2 \partial^2_{xx} f - 2(\partial_x f)(\partial_y f) \partial^2_{xy} f + (\partial_x f)^2 \partial^2_{yy} f}{\big((\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$