Parcial 2

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

Ejercicio I (Aquí, cada pregunta vale 1 punto)

Sea $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$.

1. Mostrar que Σ es una superficie diferenciable de clase C^2.

2. En una parametrización natural η de Σ, determinar la expresión local del endomorfismo de Weingarten.

3. Calcular las curvaturas principales de Σ en el punto $(0,0,0)$.

4. Calcular la curvatura de Gauss y la curvatura promedia de Σ en un punto cualquiera de esa superficie. ¿Cuál es el signo de la curvatura de Gauss de $\widehat{\eta}$?

Ejercicio II (Aquí, cada pregunta vale 2 puntos.)

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & \gamma(u) \end{array} \right.$ una parametrización local de una curva diferenciable de clase C^2.

En cada punto $\gamma(u)$, nos damos una dirección $W(u)$ (es decir, aquí, un vector unitario $W(u) \in \mathbb{R}^3$), de tal manera que la aplicación $W : I \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ así definida es de clase C^2.

Se considera entonces $\varepsilon > 0$ y la aplicación (de clase C^2)

$$\eta : \begin{array}{ccc} I\times]-\varepsilon;\varepsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \gamma(u) + vW(u) \end{array} .$$

1. Sea $u \in I$. Mostrar que η es una inmersión en el punto $(u,0)$ si y solamente si los vectores $\gamma'(u)$ y $W(u)$ son linealmente independientes.

2. Se supone de ahora en adelante que, para cualquier $u \in I$, los vectores $\gamma'(u)$ y $W(u)$ son *ortogonales* (en particular, son linealmente independientes) y que $\widehat{\eta}$ es una superficie diferenciable de clase C^2.

a. Mostrar que la expresión local de la primera forma fundamental de la superficie $\widehat{\eta}$ es
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\gamma'(u) + vW'(u)\|^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Sea $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ la expresión local de la segunda forma local de $\widehat{\eta}$. Mostrar que $g = 0$.

c. Deducir de lo anterior que la curvatura de Gauss de $\widehat{\eta}$ es negativa o nula.

3. (Bono) En esta pregunta, se supone además que, para cualquier $u \in I$, $W'(u) \neq 0$.

a. Mostar que, $\forall u \in I$, $\gamma'(u) \times W(u)$ es colineal a $W'(u)$.

b. Mostrar que, $\forall (u,v) \in I\times]-\varepsilon;\varepsilon[$,
$$\big(\partial_u \eta \times \partial_v \eta\big)(u,v) = \big(\gamma'(u) \times W(u)\big) + v\big(W'(u) \times W(u)\big).$$

c. Deducir de las preguntas anteriores y de la pregunta **2.c** que (bajo la hipótesis que W' no se anula en I) la curvatura de Gauss de $\widehat{\eta}$ es estrictamente negativa.

Indicación : Utilizar que, en la expresión local de la segunda forma fundamental de $\widehat{\eta}$,

$$f = \frac{(\partial_u \eta \times \partial_v \eta \mid \partial^2_{uv} \eta)}{\|\partial_u \eta \times \partial_v \eta\|^2}.$$

d. Se considera la curva parametrizada $\gamma : u \longmapsto (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$, un real $\alpha \geq 0$ y se pone, $\forall u \in \mathbb{R}$, $W(u) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\alpha\gamma'(u) + e_3)$ donde $e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Discutir la curvatura de la superficie $\widehat{\eta}$ así definida en función del valor del parámetro α.