Solución del parcial 1

Ejercicio I

1. El arco γ es de clase C^2 en $[0;2\pi]$. El vector velocidad del arco γ es, para cualquier $t\in[0;2\pi]$,

$$\gamma'(t)=(-3R\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t, 3R^2\,\mathrm{sen}^2 t\cos t).$$

La longitud del arco γ es

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|\,dt \\ &= 3R\int_0^{2\pi}|\cos t|\,|\mathrm{sen}\, t|\,dt \\ &= 4\times(3R)\left[\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6R. \end{aligned}$$

2. El arco γ es regular en todos los puntos $t\in[0;2\pi]$ en los cuales $\|\gamma'(t)\|\neq 0$, es decir $t\notin\left\{0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2};2\pi\right\}$.

3. Se tiene, para cualquier $t\in[0;2\pi]$,

$$\gamma''(t)=(6R\cos t\,\mathrm{sen}^2 t-3R\cos^3 t, 6R\,\mathrm{sen}\, t\cos^2 t-3R\,\mathrm{sen}^3 t).$$

Por lo tanto, la curvatura de γ en un punto regular t es

$$\begin{aligned} c_\gamma(t) &= \frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ &= \frac{-9R\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t}{27R^3(\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-2}{3R|\mathrm{sen}(2t)|}<0. \end{aligned}$$

La curva parametrizada por γ se conoce como un *astroide*.

Ejercicio II

1. El arco γ es de clase C^3 en $\mathbb{R}$. Se tiene, para cualquier $t\in\mathbb{R}$, $\gamma'(t)=\left(1,t,\frac{t^2}{2}\right)$, $\gamma''(t)=(0,1,t)$ y $\gamma'''(t)=(0,0,1)$. Por lo tanto,

$$\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|=\left\|\left(\frac{t^2}{2},-t,1\right)\right\|=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\neq 0.$$

En particular, $\gamma'(t)$ y $\gamma''(t)$ son linealmente independientes, lo cual significa que γ es biregular.

2. Ya que γ es regular y de clase C^3, la curvatura de γ es, para cualquier $t\in\mathbb{R}$,

$$c_\gamma(t)=\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{1+\frac{t^2}{2}}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^3}=\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2}.$$

3. Ya que γ es biregular de clase C^3, la torsión de γ es, para cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2}.$$

Ejercicio III

1. Ya que $t > 0$, se puede poner $t = e^s$, con $s \in \mathbb{R}$, y se obtiene $t + \frac{1}{t} = e^s + e^{-2} = 2\mathrm{ch}(s)$ y $t - \frac{1}{t} = e^s - e^{-s} = 2\mathrm{sh}(s)$.

2. Se tiene, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(s) - \mathrm{sh}^2(s) = 1$. Luego, una ecuación de $\widehat{\gamma} = \widehat{\eta}$ en $\mathbb{R}^2$ es $x^2 - y^2 = 4$, con la condición adicional de que x es > 0.

3. Por la ecuación hallada en la pregunta anterior, $\widehat{\gamma}$ es un arco de hipérbola. Pasa por el punto $(2, 0)$ y tiene direcciones asintóticas $y = x$ e $y = -x$.

4. Se tiene, para cualquier $s \in \mathbb{R}$, $\eta'(s) = (2\mathrm{sh}(s), 2\mathrm{ch}(s))$ y $\eta''(s) = (2\mathrm{ch}(s), 2\mathrm{sh}(s))$. Luego, η es regular y la curvatura de η en $s = \ln t$ es

$$c_\gamma(t) = c_\eta(s) = \frac{\det\left(\eta'(s), \eta''(s)\right)}{\|\eta'(s)\|^3} = \frac{-4}{\left(4\mathrm{ch}^2(s) + 4\mathrm{sh}^2(s)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{2\left(\mathrm{ch}(2s)\right)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

La igualdad $c_\gamma(t) = c_\eta(s)$ viene de que el cambio de parametrización $t = e^s$ (o, de manera equivalente, $s = \ln t$) es estrictamente creciente.

Ejercicio IV

1. El arco γ es de clase C^3. Se tiene, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \cos t, b)$. Luego $\|\gamma'(t)\|^2 = a^2 + b^2$. En particular, γ es regular si y solamente si $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

2. Se tiene, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\gamma''(t) = (-a \cos t, -a \operatorname{sen} t, 0)$. Luego, $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (ab \operatorname{sen} t, -ab \cos t, a^2)$ y $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2 = a^2(a^2 + b^2)$. Por lo tanto, la curvatura de γ es

$$c_\gamma(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^{\frac{3}{2}}} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}.$$

3. Ya que, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2 = a^2(a^2 + b^2)$. se tiene que γ es biregular si y solamente si $a \neq 0$.

4. La torsión de γ en $t \in \mathbb{R}$ es

$$\tau_\gamma(t) = \frac{(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$