Parcial 1

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 1 punto.**

Ejercicio I

Sea $\gamma : \begin{cases} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (R\cos^3 t, R\operatorname{sen}^3 t) \end{cases}$.

1. Calcular la longitud de γ.

2. Determinar los puntos de $[0;2\pi]$ en los cuales γ es regular.

3. Calcular la curvatura de γ en un punto regular cualquiera.

Ejercicio II

Sea $\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}\right) \end{cases}$.

1. Mostrar que γ es biregular.

2. Calcular la curvatura de γ.

3. Calcular la torsión de γ.

Ejercicio III

Sea $\gamma : \begin{cases}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(t+\frac{1}{t}, t-\frac{1}{t}\right) \end{cases}$ y sea $\widehat{\gamma}$ la traza de γ.

1. Por un cambio de parametrización, mostrar que γ es equivalente a

$$\eta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & (2\cosh(s), 2\operatorname{senh}(s)) \end{cases}.$$

2. Deducir de lo anterior una ecuación de $\widehat{\gamma}$.

3. Estudiar γ y dibujar su traza.

4. Mostrar que γ (o bien η) es regular y que tiene curvatura estrictamente negativa en cualquier punto.

Ejercicio IV (Bono)

Sean a y b dos números reales. Se considera el arco parametrizado

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a\cos(t), a\operatorname{sen}(t), bt) \end{cases}.$$

1. ¿Para cuáles valores de a y b es γ regular?

2. Se suponen a y b escogidos de tal manera que γ es regular. ¿Cuál es la curvatura de γ?

3. ¿Para cuáles valores de a y b es γ biregular?

4. Se suponen a y b escogidos de tal manera que γ es biregular. ¿Cuál es la torsión de γ?