Hoja de ejercicios 3 : Primera y segunda formas fundamentales

2014-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $R > 0$ y sea

$$S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

la esfera de centro el origen y de radio R.
a. Mostrar que S_R es una superficie diferenciable de clase C^1.
b. Mostrar que el plano tangente a S_R en un punto $v \in S_R$ es isomorfo al plano

$$v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (v|w) = 0\}.$$

c. Escribir la primera forma fundamental de S_R en coordenadas locales esféricas y calcular el área de S_R.

Ejercicio 2. Sea $a > 0$ y sea η la aplicación

$$\begin{array}{ccc}]0; 2\pi[\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (v\cos u, v \operatorname{sen} u, au) \end{array}$$

a. Mostrar que $\widehat{\eta}$ es una superficie diferenciable de clase C^2 (llamada *helicoide*).
b. Hallar una parametrización del plano tangente a $\widehat{\eta}$ en un punto arbitrario $\eta(u, v)$.
c. Mostrar que la expresión local de la primera forma fundamental de $\widehat{\eta}$ es

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. Hallar la expresión local de la segunda forma fundamental y calcular la curvatura de Gauss y la curvatura promedia de $\widehat{\eta}$.

Ejercicio 3. Sea η la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v, u) \end{array}$$

a. Mostrar que $\widehat{\eta}$ es una superficie diferenciable de clase C^2 (llamada *catenoide*).
b. Hallar la expresión local de la primera forma fundamental de $\widehat{\eta}$.
c. Hallar la expresión local de la segunda forma fundamental y calcular la curvatura de Gauss y la curvatura promedia de $\widehat{\eta}$.

Ejercicio 4. Sea

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2\}.$$

a. Mostrar que Σ es una superficie diferenciable de clase C^2 (llamada paraboloide hiperbólico).
b. En la parametrización natural $\eta(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$, determinar la expresión local del endomorfismo de Weingarten.
c. Calcular las curvaturas principales (valores propios del endomorfismo de Weingarten) de Σ en el punto $(0, 0, 0)$ y deducir de ello que $(0, 0, 0)$ es un punto hiperbólico de Σ.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de revolución asociada a la curva de $\mathbb{R}^3$ de ecuación

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y^4 \end{cases}$$

(el eje de rotación es el eje de los z).
a. Expresar Σ como la gráfica de una función de 2 variables y deducir de ello que Σ es una superficie diferenciable de clase C^2.
b. Mostrar que $(0, 0, 0)$ es un punto planar de Σ y que Σ está a un solo lado de su plano tangente en $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 6. Sea η la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, u^3 - 3uv^2) \end{array}$$

a. Mostrar que $\widehat{\eta}$ es una superficie diferenciable de clase C^2 (llamada *silla de simio*) y hallar una ecuación para $\widehat{\eta}$.
b. Mostrar que $(0, 0, 0)$ es un punto planar de $\widehat{\eta}$ y que, en cualquier vecindad de ello, $\widehat{\eta}$ se cruza con su plano tangente en $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 7. Sea $R > 0$ y sea

$$C_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

el cilindro de radio R centrado en el eje de los z.
a. Mostrar que C_R es una superficie diferenciable de clase C^2 y determinar una ecuación del plano tangente a C_R en un punto arbitrario $(x, y, z) \in C_R$.
b. Mostrar que todos los puntos de C_R son parabólicos y que C_R está a un solo lado de su plano tangente en un punto arbitrario $(x, y, z) \in C_R$.

Ejercicio 8. Sea η la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0; 2[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (v\cos u, v \operatorname{sen} u, v^3 - 1) \end{array}$$

a. Mostrar que $\widehat{\eta}$ es una superficie diferenciable de clase C^2.
b. Mostrar que el punto $(0, 1, 0)$ es un punto parabólico de $\widehat{\eta}$ y que, en cualquier vecindad de ello, $\widehat{\eta}$ se cruza con su plano tangente en $(0, 1, 0)$.