Hoja de ejercicios 2 : Funciones implícitas, inversión local

2014-I Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longrightarrow & xyz \end{array}.$$

a. Mostrar que el conjunto $X := g^{-1}(\{1\})$ es una superficie diferenciable de $\mathbb{R}^3$.
b. Mostrar que el plano tangente a X en un punto $M = (x,y,z)$ es $M + \mathcal{P}$ donde
$$\mathcal{P} = \{(h,k,l) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{x}h + \frac{1}{y}k + \frac{1}{z}l = 0\}.$$

Ejercicio 2. Sea
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$$
y sea
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longrightarrow & x^2+y^2+z^2 \end{array}.$$

a. Mostrar que S es una superficie diferenciable de $\mathbb{R}^2$.
b. Hallar los puntos críticos de la función $f|_S$.
c. Justificar geométricamente que esos puntos críticos son mínimos globales de $f|_S$.

Ejercicio 3. Sea
$$\mathbf{SL}(2;\mathbb{R}) = \{A \in M(2;\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

a. Mostrar que $\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})$ es una subvariedad diferenciable de dimensión 3 de $M(2;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.
b. Sea $H \in M(2;\mathbb{R})$ y sea I_2 la matriz identidad de tamaño 2×2. Mostrar que existe un polinomio $Q_H \in \mathbb{R}[\lambda]$ tal que, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(I + \lambda H) = 1 + \lambda \mathrm{tr}(H) + \lambda^2 Q_H(\lambda)$.
d. Deducir de lo anterior que $\det'(I_2) = \mathrm{tr}$.
c. Mostrar que el espacio tangente a $\mathbf{SL}(2;\mathbb{R})$ en I_2 es isomorfo a
$$\{H \in M(2;\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(H) = 0\}.$$

Ejercicio 4. Sea $X :=$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1\}.$$

a. Justificar la existencia de una función φ de clase C^1 en una vecindad abierta W de $(-1,1)$ tal que $(x,y) \in X \cap W$ si y solamente si $y = \varphi(x)$.
b. Calcular $\varphi'(-1)$.

Ejercicio 5. Sea $X :=$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z + \mathrm{sen}(xyz) = 0\}.$$

a. Justificar la existencia de una función φ de clase C^1 en una vecindad abierta W de $(0,0,0)$ tal que $(x,y,z) \in X \cap W$ si y solamente si $z = \varphi(x,y)$.
b. Calcular $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en $(0,0)$.

Ejercicio 6. (Inversión global).
Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que
(i) f es inyectiva,
(ii) $\forall x \in U$, $f'(x)$ es invertible.
Mostar que $V := f(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y que f es un C^1-difeomorfismo de U sobre V.

Ejercicio 7. Sea f la aplicación
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, y, y + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, x) \end{array}.$$

a. Mostrar que f es un C^1-difeomorfismo local (es decir que para cualquier (x,y) en $\mathbb{R}^2$, existe una vecindad abierta U de (x,y) tal que $f|_U$ es un C^1-difeomorfismo de U sobre un abierto V de $\mathbb{R}^2$).
b. Mostrar que f es biyectiva y concluir que es un C^1-difeomorfismo global.
Indicación : se podrá demostrar primero que, para cualquier $v \in \mathbb{R}$, la función $x \longmapsto t + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(v - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, x\right)$ es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Sea $X :=$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0\}.$$

a. Justificar la existencia de una función φ de clase C^3 en una vecindad W de $(0,1)$ tal que $(x,y) \in X \cap W$ si y solamente si $y = \varphi(x)$.
b. Utilizando que $x^3 + \varphi(x)^3 - 3x\varphi(x) - 1 = 0$ en una vecindad de $x = 0$, determinar la expansión de Taylor de orden 3 de φ en 0.

Ejercicio 9. Sea $X :=$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x = 1\}.$$

a. Justificar la existencia de una función φ de clase C^2 en una vecindad W de $(0,0)$ tal que $(x,y) \in X \cap W$ si y solamente si $y = \varphi(x)$.
b. Utilizando que $e^{x\varphi(x)} + \varphi(x)^2 - x\varphi(x) - 3\varphi(x) + 2x = 1$ en una vecindad de $x = 0$, determinar la expansión de Taylor de orden 2 de φ en 0.