Hoja de ejercicios 1 : Arcos parametrizados

2014-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en I. Sea $\gamma : t \longmapsto (t, f(t))$. Mostrar que γ es un arco regular de clase C^2 en I y hallar la función de curvatura de γ. Precisar en qué puntos se anula la curvatura.

EJERCICIO 2. Sea $\gamma : t \longmapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ para $t \in \mathbb{R}$.
a. Estudiar y dibujar el arco plano γ. Precisar cuáles son los puntos dobles y cuáles son los puntos donde γ tiene tangente horizontal o vertical.
b. Mostrar que la curvatura de γ es una función estrictamente negativa en $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 3. Sea $\gamma : t \mapsto (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$ para $t \in [0; 2\pi]$.
a. Hallar una parametrización por longitud de arco (abscisa curvilínea) de γ.
b. Calcular la curvatrura de γ utilizando la parametrización anterior y utilizando una fórmula directa.

EJERCICIO 4. Sea

$$\gamma : \begin{array}{ccc}]-1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right) \end{array} .$$

a. Estudiar y dibujar γ.
b. Mostrar que $\gamma'(0)$ es paralelo al eje de los x en $\mathbb{R}^2$.
c. Hallar $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t)$. Comparar con el dibujo.
d. Hallar la ecuación de la recta tangente a γ en un punto cualquiera $t \in I$. ¿Qué se vuelve esa ecuación cuando $t \longrightarrow -1$?

EJERCICIO 5. Sea $R > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea

$$\gamma : t \longmapsto (R\cos t, R\operatorname{sen} t, \lambda t)$$

para $t \in \mathbb{R}$. Mostrar que γ es un arco torcido biregular de clase C^3, dar una parametrización del plano osculador en $t = 0$ y calcular la curvatura y la torsión de γ.

EJERCICIO 6. Se denota $(\cdot\,|\,\cdot)$ el producto escalar euclidiano canónico de $\mathbb{R}^2$. Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arco plano regular de clase C^2, *no necesariamente unitario*. Sea $(T(t), N(t))_{t\in I}$ el marco de Frénet asociado a γ y sea $c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de curvatura de γ. Mostrar que, $\forall t \in I$,

$$c(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2}\big(\gamma''(t) \,|\, N(t)\big)$$

y

$$T'(t) = \frac{\big(\gamma''(t) \,|\, N(t)\big)}{\|\gamma'(t)\|}\, N(t).$$

Observar que $c(t) \neq (\gamma''(t) \,|\, N(t))$ y $T'(t) \neq c(t)N(t)$ para γ no unitario.

EJERCICIO 7. Se denota $(\cdot\,|\,\cdot)$ el producto escalar euclidiano canónico de $\mathbb{R}^3$. Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco torcido biregular de clase C^3, *no necesariamente unitario*. Sea $(T(t), N(t), B(t))_{t\in I}$ el marco de Frénet asociado a γ. Mostrar que, $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}\,\gamma''(t) \\ &\quad - \frac{\big(\gamma'(t) \,|\, \gamma''(t)\big)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|\|\gamma'(t)\|}\,\gamma'(t). \end{aligned}$$

EJERCICIO 8. Sea $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco torcido *unitario* biregular de clase C^3 y sea $(T(t), N(t), B(t))$ el marco de Frénet asociado a η. Sean $c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de curvatura de η y $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ su función de torsión
a. Mostrar que $(B \times T)' = B' \times T + B \times T'$ y deducir de ello que las dos ecuaciones de Frénet

$$\begin{cases} T' &= cN \\ B' &= -\tau N \end{cases}$$

implican la tercera :

$$N' = -cT + \tau B.$$

b. Mostrar que, $\forall t \in I$,

$$\tau(t) = \frac{\det(\eta'(t), \eta''(t), \eta'''(t))}{\|\eta'(t)^2\|\|\eta''(t)\|^2}.$$

EJERCICIO 9. Sean η_1 y η_2 dos arcos torcidos *unitarios* biregulares de clase C^3 en un intervalo I de $\mathbb{R}$. Para $i = 1, 2$, sea

$$(M_i(t))_{i\in T} := (T_i(t), N_i(t), B_i(t))_{t\in I}$$

el marco de Frénet asociado a η_i. Se supone que existe $t_0 \in I$ tal que $M_1(t_0) = M_2(t_0)$ y que η_1 y η_2 tienen la misma curvatura y la misma torsión. Utilizando la función $h := \|M_1 - M_2\|^2$

$$= |T_1 - T_2|^2 + |N_1 - N_2|^2 + |B_1 - B_2|^2,$$

mostrar que, para cualquier $t \in I$,

$$M_1(t) = M_2(t) \text{ y } \eta_1(t) = \eta_2(t).$$

Indicación : Derivar h y utilizar las ecuaciones de Frénet.