Examen final

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una supercie diferenciable de clase C^3. Se supondrá para simplificar que $\Sigma = \widehat{\eta}$, donde $\eta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de Σ definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$.

Para cualquier aplicación diferenciable $(u, v) \longmapsto F(u, v)$ definida en Ω, se denotarán F_u y F_v las derivadas parciales de F con respecto a las variables u y v.

Se denota $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ la expresión local, en la parametrización η, de la primera forma fundamental de Σ y ν la expresión local, también en la parametrización η, de la aplicación de Gauss $N : \Sigma \longrightarrow S^2$ de Σ.

Finalmente, se denota $K : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ la curvatura de Gauss de Σ.

1. Recordar la expresión local de las funciones E, F y G en función de las derivadas parciales de η. Misma pregunta para la aplicación ν.

2. Se recuerda la definición de los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k :

$$\eta_{uu} = \Gamma_{11}^1 \eta_u + \Gamma_{11}^2 \eta_v + e\nu \tag{1}$$

$$\eta_{uv} = \Gamma_{12}^1 \eta_u + \Gamma_{12}^2 \eta_v + f\nu \tag{2}$$

$$\eta_{vv} = \Gamma_{22}^1 \eta_u + \Gamma_{22}^2 \eta_v + g\nu \tag{3}$$

a. Mostrar que

$$e = \frac{\det(\eta_u, \eta_v, \eta_{uu})}{\|\eta_u \times \eta_v\|}.$$

b. Mostrar a partir de (1) que, si $F = 0$, entonces

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E} \text{ y } \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}.$$

Admitiremos que, a partir de (2) y (3), se obtiene de la misma manera que

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E} \text{ y } \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

3. Se recuerda la fórmula de Gauss (*theorema egregium*)

$$E(K \circ \eta) = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2.$$

a. Mostrar que, si $F = 0$, entonces

$$-2(K \circ \eta)\sqrt{EG} = \frac{E_{vv} + G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v(E_v G + E G_v)}{2EG\sqrt{EG}} - \frac{G_u(E_u G + E G_u)}{2EG\sqrt{EG}}.$$

b. Deducir de lo anterior que, si $F = 0$,

$$\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v = -2(K \circ \eta)\sqrt{EG}.$$

4. Se supone de ahora en adelante que $F = 0$. Sea $R \subset \Omega$ una región poligonal simple, con frontera $\partial R = \widehat{\gamma}$ orientada positivamente.

Utilizando la fórmula de Gauss-Green-Riemann

$$\int_{\partial R} (P\,du + Q\,dv) = \iint_R (Q_u - P_v)\,dudv,$$

mostrar que

$$\int_{\partial R} \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\, du - \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\, dv \right) = \iint_R (K \circ \eta) \sqrt{EG}\, du dv =: \iint_{\eta(R)} K\, d\sigma.$$

5. Sea ahora $R \subset \Omega$ tal que $T := \eta(R) \subset \Sigma$ es un triángulo con lados geodésicos. Denotemos $(\alpha_1(T), \alpha_2(T), \alpha_3(T))$ los ángulos internos de $\eta(T)$. Admitamos / Recordemos la fórmula de Gauss-Bonnet

$$\alpha_1(T) + \alpha_2(T) + \alpha_3(T) = \pi + \iint_T K\, d\sigma.$$

a. Precisar el signo de $\big(\alpha_1(T) + \alpha_2(T) + \alpha_3(T)\big) - \pi$ cuando $\widehat{\eta}$ es :

- una porción de cilindro,
- una porción de esfera,
- una porción de pseudo-esfera.

b. Denotaremos $T \to p$ para significar que T es un triángulo que contiene un punto fijo $p \in \Sigma$ y cuyo diámetro tiende a 0. Explicar por qué se tiene

$$\lim_{T \to p} \frac{\alpha_1(T) + \alpha_2(T) + \alpha_3(T) - \pi}{\text{área}(T)} = K(p)$$

y en qué sentido este resultado es consistente con el *theorema egregium*.
Indicación : $\text{área}(T) = \iint_T d\sigma$.