Solución de la tarea 2

2013-II — J.C. Cortissoz, F. Schaffhauser

Ejercicio 1. La función $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1+x^4}$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo tanto es localmente integrable. Ya que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos x}{1+x^4}\right| \leq \frac{1}{1+x^4}$$

y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$ converge, se tiene que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx$ converge absolutamente y por lo tanto converge.

Sea $f : z \longmapsto \dfrac{e^{iz}}{1+z^4}$. La función f es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ y $e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Sea $R > 1$ y consideremos el camino $\gamma_R + S_R$ en $\mathbb{C}$, donde

$$\gamma_R : \begin{array}{ccc} [-R;R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{array} \quad \text{y} \quad S_R : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}.$$

Entonces γ es homótopo a un lazo constante en $\mathbb{C}$ y tiene índice 1 con respecto a $e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ y índice 0 con respecto a $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ y $e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Luego, por el teorema de los residuos, se tiene

$$\begin{aligned}
\forall R > 0, \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{S_R} f(z)\,dz &= i2\pi\left(\mathrm{Res}(f; e^{i\frac{\pi}{4}}) + \mathrm{Res}(f; e^{i\frac{3\pi}{4}})\right) \\
&= i2\pi\left(\frac{e^{ie^{i\frac{\pi}{4}}}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{e^{ie^{i\frac{3\pi}{4}}}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) \\
&= \frac{i2\pi}{4e^{i\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right) \\
&= \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{2}\right) \\
&= \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

es decir :

$$\forall R > 0, \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{S_R} f(z)\,dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \tag{1}$$

Mostremos ahora que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = 0$. Si $|z| = R > 1$, entonces $|1+z^4| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1 > 0$, luego $\dfrac{1}{|1+z^4|} \leq \dfrac{1}{R^4-1}$. Por lo tanto,

$$\left|\int_{S_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1}$$

lo cual implica que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = 0$.

Así que, si hacemos tender R a $+\infty$ en (1) y sacamos la parte real a ambos lados de la ecuación, obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Ejercicio 2. 1. La función $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en $]0; +\infty[$, por lo que es localmente integrable en ese intervalo. Ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = 1$, la función g se prolonga por continuidad en 0 y $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ converge. Para mostrar que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ converge, estudiemos la función $A \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ para $A > \frac{\pi}{2}$. Siendo de clase C^1 en $\left[\frac{\pi}{2}; A\right]$ todas las funciones involucradas, una integración por partes da

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx &= \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{A} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \\ &= \frac{-\cos A}{A} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Ya que $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\cos A}{A} = 0$ y $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ es (abolutamente) convergente, se tiene que $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ existe. Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ converge.

Sin embargo, esa integral no converge abolutamente, pues, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, el cambio de variable $u = x + k\pi$ muestra que

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx &= \int_0^{\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x+k\pi}\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x+k\pi}\, dx \\ &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx \\ &\geq \frac{2}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

así que,

$$\forall n \geq 1, \int_0^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Eso implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx = +\infty$ y por lo tanto que la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx$ diverge.

2. a. El lazo γ va de $-R$ a $-r$ en el eje real y después de $-r$ a r siguiendo el semi-círculo $|z| = r$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Luego va de r a R en el eje real y después de R a $-R$ en el semi-círculo $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

b. La función $f : z \longmapsto \dfrac{e^{iz}}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ y, $\forall (r,R) \in X$, el lazo γ es homótopo a un lazo constante en $\mathbb{C}^*$, así que,

$$\forall (r,R) \in X, \int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

c. Utilizando el cambio de variable $u = -t$ en la primera integral, se tiene, $\forall (r, R) \in X$,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_-} f(z)\,dz + \int_{\gamma_+} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t}\,dt \\ &= \int_r^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t}\,dt \\ &= 2i \int_r^R \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.\end{aligned}$$

d. Sea $R > 0$. Se tiene, $\forall R > 0$,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it}\,dt = i \int_0^\pi e^{iR(\cos t + i \operatorname{sen} t)}\,dt$$

luego, utilizando el cambio de variable $u = \pi - t$ en la integral $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt$, se tiene

$$\forall R > 0, \left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t}\,dt.$$

e. Sea $h : \begin{array}{ccc} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{sen} t - \frac{2}{\pi} t \end{array}$. La función h es de clase C^2 en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ y

$$\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, h'(t) = \cos t - \frac{2}{\pi} \text{ y } h''(t) = -\operatorname{sen} t < 0$$

Luego h' es una biyección continua estrictamente decreciente en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ya que $h'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ y $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$, la función h se anula una sola vez en $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, digamos en algún punto $x_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Entonces h es estrictamente creciente en $[0; x_0]$ y estrictamente decreciente en $[x_0; \frac{\pi}{2}]$. Ya que $h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, h es positiva en $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, es decir que

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{sen} t \geq \frac{2}{\pi} t.$$

f. Sea $R > 0$. Por la pregunta anterior, $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^{-R \operatorname{sen} t} \leq e^{-\frac{2R}{\pi} t}$. Luego, por la pregunta **d**,

$$\forall R > 0, \left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} t}\,dt = \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}).$$

g. La función $g : z \longmapsto \frac{e^{iz} - 1}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ y

$$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{e^{iz} - 1}{z} = i + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-1},$$

lo cual tiende a i cuando z tiende a 0. Así que la función holomorfa g es acotada en una vecindad de 0 y por lo tanto tiene una singularidad removible en 0.

h. Ya que g se prolonga a una función $\widehat{g}$ holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y que $\mathbb{C}$ es estrellado, entonces $\widehat{g}$ tiene una primitiva holomorfa G en $\mathbb{C}$. Por lo tanto,

$$\forall r > 0, \int_{\gamma_r} g(z)\,dz = G(-r) - G(r).$$

Pero $\lim\limits_{r \to 0} [G(-r) - G(r)] = G(0) - G(0) = 0$. Ahora, ya que $g(z) = f(z) - \frac{1}{z}$, se tiene que

$$\forall r > 0, \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\gamma_r} g(z)\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\gamma_r} g(z)\,dz + \int_\pi^0 \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \int_{\gamma_r} g(z)\,dz - i\pi$$

y por lo tanto $\displaystyle\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = -i\pi$.

i. Por la pregunta **f**, se tiene que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$. Luego, por las preguntas **b**, **c** y **h**, podemos escribir que $\lim_{r\to 0, R\to+\infty} 2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = i\pi$, es decir que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 3. 1. Justifiquemos primero la convergencia del producto infinito $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k}$ para $z \in D(0;1)$. Eso significa, por definición, que la sucesión $\left(\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k}\right)_{N\geq 1}$ converge en $\mathbb{C}$. Si $N \geq 1$ y $z \in D(0;1)$, tenemos

$$\ln \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{k=1}^{N} -\ln(1-z^k),$$

donde ln es la función definida, para $\rho > 0$ y $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, por $\ln(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta$. Entonces, para cualquier $k \geq 1$, se tiene

$$\forall z \in D(0;1), -\ln(1-z^k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{z^{kj}}{j}$$

de tal forma que

$$\forall N \geq 1, \forall z \in D(0;1), \ln \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{z^{kj}}{j}.$$

Estudiemos entonces la serie doble

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{z^{kj}}{j}.$$

Para cualquier $k \geq 2$ y cualquier $j \geq 2$, se tiene $kj \geq (k+j)$, así que, para cualquier $z \in D(0;1)$ y $k, j \geq 2$, se tiene $|z|^{kj} \leq |z|^{k+j} = |z|^k |z|^j$. Por lo tanto, utilizando que $\forall j \geq 1, \frac{1}{j} \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\forall z \in D(0;1), \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|z|^{kj}}{j} &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} |z|^j + \sum_{k=1}^{+\infty} |z|^k + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{j=2}^{+\infty} |z|^{k+j}\right) \\
&\leq \frac{1}{1-|z|} + \frac{1}{1-|z|} + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} |z|^k\right)\left(\sum_{j=2}^{+\infty} |z|^j\right) \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie doble $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{z^{kj}}{j}$ converge absolutamente en $D(0;1)$. En particular, $\forall z \in D(0;1)$, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(1-z^k)$ converge y eso implica que, $\forall z \in D(0;1)$, el producto infinito $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k}$ converge y que

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(1-z^k)\right).$$

En particular, $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k} \neq 0$. Se puede observar que la función

$$F : \begin{array}{ccc} D(0;1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k} \end{array}$$

así definida es holomorfa en $D(0;1)$, pues en cualquier disco cerrado de la forma $D(0;r]$ con $r < 1$, F es límite uniforme de una sucesión de funciones holomorfas (la serie doble anterior converge normalmente y por lo tanto uniformemente en $D(0;r]$).

Hallemos entonces la expansión en serie de potencias de F en 0. Si $N \geq 1$, se tiene, $\forall z \in D(0;1)$ y $\forall N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} &= \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \ldots \times \frac{1}{1-z^N} \\ &= (1+z+z^2+\ldots)(1+z^2+z^4+\ldots)\ldots(1+z^N+z^{2N}+\ldots). \end{aligned}$$

Por definición de los enteros $q(n)$, el producto de Cauchy de esas N series de potencias es

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = q(0) + q(1)z + q(2)z^2 + \ldots + q(N)z^N + B_N(z)$$

donde $B_N(z) = \sum_{j=N+1}^{+\infty} b_j^{(N)} z^j$ es una serie de potencias cuyo radio de convergencia es ≥ 1 *y cuyos coeficientes dependen de* N. Ya que F es holomorfa en $D(0;1)$, tiene una expansión en serie de potencias en $D(0;1)$:

$$\forall z \in D(0;1), \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j$$

donde $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j$ es una serie de potencias de radio de convergencia ≥ 1. Entonces, $\forall N \geq 1$ y $\forall z \in D(0;1)$,

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k} - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{j=0}^{N} \big(a_j - q(j)\big) z^j + \sum_{j=N+1}^{+\infty} a_j z^j - B_N(z).$$

El miembro de la izquierda es igual a

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} -\ln(1-z^k) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{z^{kj}}{j} \right),$$

el cual sólo contiene potencias de z de grado $\geq (N+1)$. El término

$$\sum_{j=N+1}^{+\infty} a_j z^j - B_N(z)$$

del miembro de la derecha también sólo contiene potencias de z de grado $\geq (N+1)$. Ya que la igualdad vale para todo $z \in D(0;1)$, debemos tener $\forall j \in [0;N]$, $a_j = q(j)$. Como eso vale para todo $N \geq 1$, se tiene que

$$\forall z \in D(0;1), F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} q(j) z^j.$$

2. Sea $n \geq 4$ fijo. Consideremos la función

$$h : \begin{array}{ccc} \left[0; 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1-x) + x\ln(n) \end{array}.$$

Esta función es de clase C^2 en $\left[0;1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ y se tiene, para cualquier $x \in \left]0;1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$,

$$h'(x) = -\frac{1}{1-x} + \ln(n) \text{ y } h''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} < 0.$$

Por lo tanto, h' es una biyección continua estrictamente decreciente en $\left[0;1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Ya que $h'(0) = \ln(n) - 1 > 0$ (pues $n \geq 2$) y $h'\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{n} + \ln(n) < 0$ (pues $n \geq 1$), h se anula una sola vez en $\left]0;1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$, digamos en un punto x_0. Entonces h es estrictamente creciente en $[0;x_0]$ y estrictamente decreciente en $\left[x_0;1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Ya que $h(0) = 0$ y

$$h\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(n) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln(n) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln(n) \geq 0$$

(pues $n \geq 4$), se tiene que h es positiva en $\left[0;1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, es decir:

$$\forall x \in \left[0;1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right], x\ln(n) \geq -\ln(1-x).$$

3. Sea $n \geq 4$ fijo. Por continuidad del módulo, se tiene, para cualquier $z \in D(0;1)$, $|F(z)| = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k} \neq 0$ y $\ln|F(z)| = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} -\ln|1-z^k|$. Pero, si $z \in D(0;1)$, entonces

$$\forall k \geq 1, |1-z^k| \geq 1 - |z^k| = 1 - |z|^k,$$

luego

$$-\ln|1-z^k| \leq -\ln(1-|z|^k)$$

y, por la pregunta **2**, se tiene entonces que, si $|z| \in \left[0;1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$,

$$\forall k \geq 1, -\ln|1-z^k| \leq |z|^k \ln(n).$$

Por lo tanto, si $|z| \left[0;1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, entonces

$$\ln|F(z)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |z|^k \ln(n) = \ln(n)\frac{|z|}{1-|z|}$$

lo cual implica que, para tal z,

$$|F(z)| \leq e^{\ln(n)\frac{|z|}{1-|z|}}.$$

4. Mostremos primero que, si $n \geq 2$, $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{3e}$. Para ello, consideremos la función

$$g : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = x\ln(x-1) - x\ln(x) \end{array}.$$

Entonces g es de clase C^2 en $]1;+\infty[$ y se tiene que

$$\forall x \in]1;+\infty[, g'(x) = \ln(x-1) - \ln(x) + \frac{1}{x-1} \quad \text{y} \quad g''(x) = -\frac{1}{x(x-1)^2} < 0.$$

Por lo tanto, g' es estrictamente decreciente en $]1;+\infty[$. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, se tiene que g es positiva en $]+1;+\infty[$. Por lo tanto, g es creciente en $]1;+\infty[$. En particular,

$$\forall n \geq 2, \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^{g(\sqrt{n})} \geq e^{g(\sqrt{2})}.$$

Pero $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. Luego, $\forall n \geq 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \approx 0,18 \geq 0,122 \approx \frac{1}{3e}.$$

Apliquemos entonces las desigualdades de Cauchy a la sucesión $(q(n))_{n\in\mathbb{N}}$, es decir a los coeficientes de la expansión en serie de potencias de F en 0. Para $n \geq 4$ fijo, se aplica la n-ésima desigualdad de Cauchy a F en el disco cerrado $D\left(0; 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$:

$$q(n) \leq \frac{\sup_{|z|\leq 1-\frac{1}{\sqrt{n}}} |F(z)|}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}.$$

Por la pregunta **3**, eso implica que

$$q(n) \leq \frac{\sup_{|z|\leq 1-\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{\ln(n)\frac{|z|}{1-|z|}}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} \leq \frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}$$

(aquí se utilizó que la función $x \longmapsto \frac{x}{1-x}$ es creciente en $[0; 1[$). Por la pregunta **4**, eso implica que

$$q(n) \leq e^{(\sqrt{n}-1)\ln(n)}(3e)^{\sqrt{n}}$$

es decir

$$q\left(n\right) \leq e^{\left(\sqrt{n}-1\right)\ln(n)+\sqrt{n}(1+\ln(3))} = \frac{e^{\sqrt{n}(\ln(n)+1+\ln(3))}}{n}.$$