Tarea 2 : para entregar el 22 de noviembre.

2013-II — J.C. Cortissoz, F. Schaffhauser

Ejercicio 1. Muestre que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx$ converge y que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} (\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Ejercicio 2. El propósito del ejercicio es mostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

1. Muestre que la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge sin converger absolutamente.

Indicación : Para mostrar que la integral no converge absolutamente, muestre primero que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x+k\pi}\,dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$.

2. Sea

$$X = \{(r,R) \in \,]0;+\infty[\times]0;+\infty[\ \mid r < R\}$$

y sea $\gamma := \gamma_- + \gamma_r + \gamma_+ + \gamma_R$ el lazo en $\mathbb{C}$ obtenido a partir de los caminos

$$\gamma_- : \begin{array}{ccc} [-R;-r] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{array}, \quad \gamma_r : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & re^{i(\pi-t)} \end{array}$$

$$\gamma_+ : \begin{array}{ccc} [r;R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{array}, \quad \gamma_R : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}.$$

También se introduce la función $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{e^{iz}}{z} \end{array}$.

a. Dibuje γ.

b. Muestre que, $\forall (r,R) \in X$, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

c. Muestre que, $\forall (r,R) \in X$, $\int_{\gamma_-} f(z)\,dz + \int_{\gamma_+} f(z)\,dz = 2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

d. Muestre que, $\forall R > 0$, $\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen} t}dt$.

e. Muestre que, $\forall t \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{sen} t \geq \frac{2}{\pi}t$.

f. Deduzca de lo anterior que $\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi}{R}(1-e^{-R})$.

g. Muestre que la función $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{e^{iz}-1}{z} \end{array}$ tiene una singularidad removible en 0.

h. Deduzca de lo anterior que, $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g(z)\,dz = 0$ y que $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = -i\pi$.

i. Concluya.

Ejercicio 3. Dado un entero positivo n, una partición de dicho número es una sucesión $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \leq n$ de enteros tal que

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Por ejemplo, las particiones del número 4 son:

$$4,\ 1+3,\ 1+1+2,\ 1+1+1+1,\ 2+2.$$

Sea $q(n)$ el número de particiones de n (se conviene que $q(0)=1$). Por ejemplo, vimos arriba que $q(4)=5$. El propósito de este ejercicio es encontrar una cota por encima no trivial para $q(n)$ utilizando las desigualdades de Cauchy. Para que compare con el resultado obtenido en este ejercicio, recuerde que Hardy y Ramanujan mostraron que asintóticamente $q(n)$ se comporta como

$$\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}}.$$

1. Sea

$$F(z)=\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-z^k},\quad |z|<1.$$

Sin preocuparse por la convergencia de la productoria, muestre que la expansión en serie de potencias de F en 0 es

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}q(n)\,z^n.$$

2. Sea $n\geq 4$ fijo. Muestre que para cualquier x tal que $0\leq x\leq 1-\frac{1}{\sqrt{n}}$, se cumple la desigualdad

$$-\ln(1-x)\leq x\ln(n).$$

3. Utilize el punto anterior para mostrar que, siempre que $n\geq 4$ y $0\leq |z|\leq 1-\frac{1}{\sqrt{n}}$, se tiene

$$|F(z)|\leq e^{\ln(n)\frac{|z|}{1-|z|}}.$$

4. Utilizando las desigualdades de Cauchy, muestre que

$$\forall n\geq 4, q(n)\leq e^{\left(\sqrt{n}-1\right)\ln(n)+\sqrt{n}(1+\ln 3)}=\frac{e^{\sqrt{n}(\ln n+1+\ln 3)}}{n}.$$

Indicación: Le puede ser de ayuda en este punto saber que (trate de demostrarlo!)

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{3e},\quad \text{para todo}\quad n\geq 2.$$