Solución de la tarea 1

2013-II J.C. CORTISSOZ, F. SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. a. El abierto U es estrellado con respecto al punto 1, pues la única forma que el segmento $[1;z]$ interseque el eje real es si z mismo es real, caso en el cual, por pertenecer a U, z tiene que ser un real estrictamente positivo, de tal manera que $[1;z]$ no contiene puntos del intervalo $]-\infty;0]$.

La función $u:(x,y)\longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ es de clase C^2 en U pues tiene derivadas parciales de clase C^2 en U. Además,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0,$$

por lo que u es armónica en U.

b. Para mostrar que, para cualquier $z\in U$,

$$\mathrm{Arg}(z)=\int_1^z \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

donde la integral se toma a lo largo del segmento de 1 a z en $\mathbb{C}$, podemos seguir cualquiera de los siguientes dos métodos.

Método 1 : Ya que u es armónica en el abierto estrellado U, tiene un único conjugado armónico v tal que $v(1)=0$. Explícitamente,

$$v(z)=\int_1^z -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy=\int_1^z \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Pero, si $z=x+iy$, entonces $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln|z|$ y u es la parte real de la función holomorfa

$$\mathrm{Ln}(z)=\ln|z|+i\mathrm{Arg}(z)$$

(determinación principal del logaritmo en el abierto estrellado U). En particular, $\mathrm{Arg}(z)$ es un conjugado armónico de u en U. Ya que $\mathrm{Arg}(1)=0$, tenemos, por unicidad, que $\mathrm{Arg}(z)=v(z)$ para cualquier $z\in U$.

Método 2 : Ya que u es armónica en U, la forma diferencial

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy=\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

es cerrada en U (eso también se puede verificar directamente). Ya que U es estrellado, esa forma es exacta en U y el valor de la integral propuesta no depende del camino escogido entre 1 y z. Sigamos entonces primero el camino $\gamma_1(t)=(1-t)+t|z|$ (con $0\le t\le 1$) entre 1 y $|z|\in]0;+\infty[$ y después el camino $\gamma_2(t)=|z|e^{it}$ (con $0\le t\le \mathrm{Arg}(z)$) entre $|z|$ y z. Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_1^z \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\\
=\;&\int_{\gamma_1}\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy+\int_{\gamma_2}\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\\
=\;&0+\int_0^{\mathrm{Arg}(z)}(\mathrm{sen}^2\,t+\cos^2 t)\,dt\\
=\;&\mathrm{Arg}(z).
\end{aligned}$$

EJERCICIO 2. a. Se recuerda que, para cualquier z en $\mathbb{R}^2$ y cualquier $R>0$,

$$\iint_{D_R(z)} dxdy=\text{área}\big(D_R(z)\big)=\pi R^2.$$

a-1. Ya que $D_R(z_1) \subset D_{R+d}(z_2)$ y $|u(x,y)| \leq M$ para cualquier (x,y) en $\mathbb{R}^2$, se tiene, para cualquier $R > 0$,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\, dxdy \right| \\
= & \ \frac{1}{\pi R^2} \left| \iint_{D_{R+d}(z_2) \setminus D_R(z_1)} u(x,y)\, dxdy \right| \\
\leq & \ \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2) \setminus D_R(z_1)} |u(x,y)|\, dxdy \\
\leq & \ \frac{M}{\pi R^2} (\pi (R+d)^2 - \pi R^2) = \frac{M}{R^2}(2dR + d^2) \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\, dxdy \right| = 0.$$

a-2. Ya que $|u(x,y)| \leq M$ para cualquier (x,y) en $\mathbb{R}^2$, se tiene, para cualquier $R > 0$,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi (R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy \right| \\
= & \ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+d)^2} \right) \left| \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy \right| \\
\leq & \ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+d)^2} \right) \iint_{D_{R+d}(z_2)} |u(x,y)|\, dxdy \\
\leq & \ \frac{M}{\pi} \left(\frac{2dR + d^2}{R^2 (R+d)^2} \right) \pi (R+d)^2 \sim_{R \to +\infty} \frac{2dM}{R} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi (R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy \right| = 0.$$

a-3. Sea $R > 0$. Por la desigualdad triangular, se tiene

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi (R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy \right| \\
\leq & \ \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy \right| \\
& + \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi (R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy \right|
\end{aligned}$$

Por las preguntas **a-1** y **a-2**, ambos términos del miembro de la derecha tienden a 0 cuando R tiende a $+\infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\, dxdy - \frac{1}{\pi (R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy \right| = 0.$$

b. Si u es armónica en $\mathbb{R}^2$, entonces cumple con la propiedad del promedio en los discos $D_R(z_1)$ y $D_{R+d}(z_2)$. Es decir que, para cualquier $R > 0$,

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\, dxdy = u(z_1) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\pi (R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\, dxdy = u(z_2).$$

Por la pregunta **a-3**, tenemos entonces, si u es acotada, que $\lim_{R \to +\infty} |u(z_1) - u(z_2)| = 0$, es decir que $u(z_1) = u(z_2)$. Como z_1 y z_2 eran arbitrarios, tenemos que u es constante en $\mathbb{R}^2$.

Bono. Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C}$, entonces las funciones $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son armónicas y acotadas (pues $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ e $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$). Por el teorema de Liouville para funciones armónicas, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son constantes, lo cual implica que f es constante.