Tarea 1 : para entregar el 20 de septiembre.

2013-II — J.C. Cortissoz, F. Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $U = \mathbb{C}\backslash]-\infty; 0]$ y sea $u : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x+iy & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \end{array}$.

a. `1 punto`. Justificar que U es un abierto estrellado de $\mathbb{C}$ y mostrar que u es armónica en U.

b. `2 puntos`. Mostrar que, para cualquier $z \in U$,

$$\mathrm{Arg}(z) = \int_1^z \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

donde la integral se toma a lo largo del segmento de 1 a z en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 2. En este ejercicio, se busca dar una demostración, utilizando sólo el principio del valor medio, del siguiente Teorema de Liouville para funciones armónicas :

Teorema 1. *Sea $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica y acotada en $\mathbb{R}^2$. Entonces u es constante.*

Aquí, decir que u es acotada significa que existe $M \geq 0$ tal que, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|u(x,y)| \leq M$, donde $|\cdot|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$.

En todo el ejercicio, se fijan z_1 y z_2 en $\mathbb{R}^2$, distintos, y se denota $d > 0$ la distancia entre ellos. Para $z \in \mathbb{R}^2$ y $R > 0$, se denota $D_R(z)$ el disco cerrado de centro z y de radio R.

a. El propósito de esta pregunta es demostrar que, para cualquier función continua y acotada $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, no necesariamente armónica, se tiene

$$\text{(1)} \qquad \lim_{R\to+\infty} \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\,dxdy - \frac{1}{\pi(R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\,dxdy \right| = 0.$$

En las tres preguntas que siguen, se denota u una función continua y acotada en $\mathbb{R}^2$.

a-1. `2 puntos`. Mostrar que

$$\text{(2)} \qquad \lim_{R\to+\infty} \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(z_1)} u(x,y)\,dxdy - \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\,dxdy \right| = 0.$$

Una información que podrá servirle es que $D_R(z_1) \subset D_{R+d}(z_2)$.

a-2. `2 puntos`. Mostrar que

$$\text{(3)} \qquad \lim_{R\to+\infty} \left| \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\,dxdy - \frac{1}{\pi(R+d)^2} \iint_{D_{R+d}(z_2)} u(x,y)\,dxdy \right| = 0.$$

a-3. `1 punto`. Deducir de las identidades (2) y (3) la identidad (1).

b. `2 puntos`. Usando (1), mostrar que, si u es armónica y acotada en $\mathbb{R}^2$, entonces debe ser constante.

Bono. `1 punto`. A partir del teorema 1, demuestre el teorema de Liouville para funciones holomorfas :

Teorema 2. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C}$. Entonces f es constante.*