Solución del segundo parcial

2013-II J.C. Cortissoz, F. Schaffhauser

Ejercicio 1. a. La función $z \longmapsto \operatorname{sen}(z)$ es una función entera y, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. Por lo tanto, para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

y vemos que la función $\widehat{f} : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ es una función entera (el radio de convergencia de esa serie de potencias es $+\infty$) que coincide con f en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, f admite una extensión holomorfa a $\mathbb{C}$.

b. La función $g := 1 - \widehat{f}$ es una función entera cuya expansión en serie de potencias en 0 es

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} z^{2n} = \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots .$$

Por lo tanto, 0 es un cero de orden 2 de g.

Ejercicio 2. a. La función $f : z \longmapsto z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ como producto y compuesta de funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es tal que $f(z) = 0$, entonces $\operatorname{sen}(\frac{1}{z}) = 0$, lo cual implica $\frac{1}{z} = n\pi$ por algún $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, los ceros de f en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los elementos del conjunto

$$\left\{ \frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

b. Si f se extendiera a una función $\widehat{f}$ holomorfa en todo $\mathbb{C}$, entonces $0 \in \mathbb{C}$ sería punto de acumulación de ceros de $\widehat{f}$, pues $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$. Por el principio de los ceros aislados, $\widehat{f}$ sería constante en el abierto conexo $\mathbb{C}$. Por lo tanto, f sería constante en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pero así no es, por lo que la extensión $\widehat{f}$ no existe.

c. Por la pregunta anterior, la singularidad que tiene f en 0 no es removible. Ya que $\lim_{x \to \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, f no tiende a ∞ cuando z tiende a 0. Por lo tanto, 0 no es un polo de f y tiene que ser una singularidad esencial. También se puede demostrar eso utilzando la expansión en serie de Laurent de f en 0 :

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = z - \frac{1}{3! z} + \frac{1}{5! z^2} - \cdots$$

que tiene una cantidad infinita de términos de índice negativo no nulos.

Ejercicio 3. a. La serie derivada de la serie de potencias $F(z)$ es la serie geométrica (de razón z^2) $\sum_{k=0}^{+\infty} (z^2)^k$, que tiene radio de convergencia igual a 1. Ya que una serie de potencias y su serie derivada tienen el mismo radio de convergencia, $F(z)$ también tiene radio de convergencia 1. También se puede obtener el resultado utilizando la fórmula de Hadamard.

b. Para cualquier $z \in D(0;1)$,

$$F'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k} = \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right).$$

c. Se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} &= F\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} F'(t)\,dt + F(0) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt + 0 \\
&= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{\ln 3}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. a. Sea $r' > 0$ y sea $r \in [0; r'[$. Ya que f es continua en $\mathbb{C}$, alcanza su máximo en cada compacto de $\mathbb{C}$. En particular, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| = r'$ y $|f(z_0)| = M(r')$. De la misma manera, existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_1| = r$ y $|f(z_1)| = M(r)$. Ya que f es holomorfa y no constante en $\mathbb{C}$, el principio del máximo aplicado a $f|_{D(0;r')}$ implica que $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Por lo tanto, $M(r) < M(r')$.

b. Supongamos que $\sup_{r\geq 0} M(r) < +\infty$. Entonces la función $r \longmapsto M(r)$ es acotada en $[0; +\infty[$. Por lo tanto, la función entera f es acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, eso implica que f es constante, lo cual contradice la hipótesis del enunciado. Por lo tanto, $\sup_{r\geq 0} M(r) = +\infty$.

Nota : *Ceros de la función* $z \longmapsto \operatorname{sen}(z)$.
Por definición, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, así que $\operatorname{sen}(z) = 0$ si y solamente si $e^{iz} = e^{-iz}$, es decir $e^{i2z} = 0$. Si ponemos $z = x + iy$ con x y y reales, entonces $e^{i2z} = 0$ si y solamente si $e^{-2y} = 1$ y $e^{i2x} = 1$, es decir $y = 0$ y $2x = 2k\pi$ por algún $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\operatorname{sen} z = 0$ si y solamente si $z = k\pi$ por algún $k \in \mathbb{Z}$.