Universidad de Los Andes — Variable compleja

Parcial 2. Duración : 2 horas.

2 de noviembre 2013 — J.C. Cortissoz, F. Schaffhauser

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**. Cada pregunta vale un punto.

Se recuerda que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Ejercicio 1. Se considera la función holomorfa $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \end{array} \right.$.

a. Muestre que f se extiende a una función $\widehat{f}$ holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

b. Muestre que el punto $0 \in \mathbb{C}$ es un cero de orden 2 de $g := 1 - \widehat{f}$.

Ejercicio 2. Se considera la función $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) \end{array} \right.$.

a. Muestre que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y que sus ceros son los puntos $z_n = \frac{1}{n\pi}$, para cualquier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b. Utilizando el punto anterior, muestre que f no puede ser extendida a una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

c. ¿Qué tipo de singularidad tiene f en 0?

Ejercicio 3. Se considera la función $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$.

a. Halle el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$.

b. Se denota $D(0;1)$ el disco unidad de $\mathbb{C}$. Muestre que $\forall z \in D(0;1)$,

$$F'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right).$$

c. Muestre que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} = \frac{\ln 3}{2}$.

Indicación : Calcule $F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)$ utilizando una integral.

Ejercicio 4. Sea f una función entera. Se supone en todo el ejercicio que f es no constante. Para $r \in [0; +\infty[$, se denota $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| \in [0; +\infty[$.

a. Muestre que, si $r < r'$, entonces $M(r) < M(r')$.

b. Muestre que $\sup_{r \geq 0} M(r) = +\infty$.