Soluciíon del primer parcial

2013-II J.C. CORTISSOZ, F. SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. a. Escribamos $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho \in [0; +\infty[$ y $\theta \in [0; 2\pi]$. Entonces $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ es igual a 1 si y sólo si $\rho^n = 1$ y $n\theta \equiv 0 \mod 2\pi$, es decir $\rho = 1$ y $\theta = k\frac{2\pi}{n}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, las n soluciones distintas de la ecuación $z^n = 1$ son los números complejos $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ con $k \in \{0; \dots ; n-1\}$, es decir $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}, \dots, \omega_{n-1} = e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}$.

b. Podemos caer en cuenta que, para cualquier $k \in \{0; \dots ; n-1\}$, $\omega_k = (\omega_1)^k$. Además, si $n \geq 2$, $\omega_1 \neq 1$. Por lo tanto,

$$\omega_0 + \dots + \omega_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = \frac{0}{1-\omega_1} = 0.$$

EJERCICIO 2. a. Sea $P(x,y) = e^x \cos y$ y $Q(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Entonces P y Q son $\mathbb{R}$-diferenciables en $\mathbb{C}$ (como funciones de dos variables reales). Además se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = e^x(-\operatorname{sen} y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Por lo tanto, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $\exp = P + iQ$, de modo que exp es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Ya que exp es holomorfa en $\mathbb{C}$, se tiene, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\exp)'(x+iy) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \exp(x+iy),$$

es decir $(\exp)'(z) = \exp z$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

c. Para mostrar que la aplicación holomorfa $z \longmapsto \exp(z)$ es una aplicación conforme de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^*$, es suficiente mostrar que $(\exp)'(z) \neq 0$ en $\mathbb{C}$. Ya que $(\exp)'(z) = \exp z$, eso también demostrará que $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$. Consideremos entonces la ecuación $\exp z = 0$ en $\mathbb{C}$, es decir

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = 0$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ya que $e^x \neq 0$ para $x \in \mathbb{R}$, eso sólo puede ocurrir si $\cos y + i \operatorname{sen} y = 0$, lo cual implicaría que $|\cos y + i \operatorname{sen} y| = 0$, es decir $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 0$ y eso es absurdo, pues $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1 \neq 0$. Por lo tanto, $\exp z \neq 0$ en $\mathbb{C}$.

EJERCICIO 3. a. Ya que u es diferenciable, la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $u(x,y) = c_1$ en un punto (x_0, y_0) de esa curva es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

De la misma manera, la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $v(x,y) = c_2$ en un punto (x_0, y_0) de esa curva es

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

b. Ya que $f = u + iv$ es holomorfa, tenemos, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Por lo tanto, los vectores $\operatorname{grad}_u(x_0,y_0)$ y $\operatorname{grad}_v(x_0,y_0)$, que son los vectores normales a las rectas tangentes a C_1 y C_2 en (x_0,y_0), son ortogonales (pues su producto escalar es 0). Eso significa precisamente que C_1 y C_2 se intersecan de manera ortogonal en (x_0,y_0).

Ejercicio 4. a. Por definición,

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + sen^2 t}(-\operatorname{sen} t)\, dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + sen^2 t}(\cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b. Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

en U, por lo que α es cerrada en U. Si α fuese exacta en U, se tendría $\int_\gamma \alpha = 0$, pues γ es una curva cerrada. Ya que $\int_\gamma \alpha = 2\pi \neq 0$, α no es exacta.

Ejercicio 5. Sea $P(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ un polinomio homogéneo de grado 3 en 2 variables. Se tiene, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\Delta P &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) \\
&= (6ax + 2by) + (2cx + 6dy) \\
&= (6a + 2c)x + (2b + 6d)y.
\end{aligned}$$

Luego $\Delta P = 0$ en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $\left\{\begin{array}{lcl} 6a + 2c & = & 0 \\ 2b + 6d & = & 0 \end{array}\right.$. Por lo tanto, los polinomios homogéneos de grado 3 en dos variables que son funciones armónicas en $\mathbb{R}^2$ son los polinomios de la forma

$$P(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$$

con $(a,d) \in \mathbb{R}^2$. Verificación : $\Delta P = (6ax - 6dy) + (-6ax + 6dy) = 0$.