Parcial 1. Duración : 2 horas.

7 DE SEPTIEMBRE 2013

J.C. CORTISSOZ, F. SCHAFFHAUSER

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**. Cada pregunta vale un punto.

EJERCICIO 1. Sea $n \geq 1$ un entero.

a. Mostrar que la ecuación $z^n = 1$ tiene n soluciones distintas $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ en $\mathbb{C}$ y determinarlas.

b. Mostrar que, si $n \geq 2$, $\omega_0 + \ldots + \omega_{n-1} = 0$.

EJERCICIO 2. Se considera la función

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \end{array} .$$

a. Mostrar que la función exp es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Calcular $\exp'(z)$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

c. Mostrar que $z \longmapsto \exp(z)$ es una aplicación conforme de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^*$.

EJERCICIO 3. Sea $f = u + iv : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$. Sean c_1 y c_2 dos números reales y sean C_1 y C_2 las curvas de ecuaciones $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$, respectivamente.

a. Hallar la ecuación de la recta tangente a C_1 en un punto (x_0, y_0) de C_1. Misma pregunta para C_2.

b. Mostrar que si C_1 y C_2 se intersecan en un punto (x_0, y_0), entonces son ortogonales en ese punto.

EJERCICIO 4. Sea $U = \mathbb{C}^*$ y sea α la 1-forma diferencial en U definida por

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy.$$

a. Sea $\gamma : \begin{array}{ccc} [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$. Calcular $\int_\gamma \alpha$.

b. Mostrar que la 1-forma α es cerrada pero no exacta en U.

EJERCICIO 5. Hallar todos los polinomios homogéneos de grado 3 en dos variables que son funciones armónicas en $\mathbb{R}^2$.