Hoja de ejercicios 8 : Funciones meromorfas, residuos

2013-II — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Mostrar que las siguientes series definen funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ y determinar sus polos, con sus respectivos órdenes (inspirarse del ejercicio 7 de la hoja 7).

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+z)}$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$.

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{n!(z^2+n^2)}$.

EJERCICIO 2. Mostrar que si z_0 es un polo de orden $n \geq 1$ de una función meromorfa f, entonces

$$\operatorname{Res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z),$$

donde $g : z \longmapsto (z-z_0)^n f(z)$.

EJERCICIO 3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función holomorfa $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Se supone que existe un entero $n \geq 1$ tal que la función $z \longmapsto (z-z_0)^n f(z)$ es acotada en una vecindad de z_0. Mostrar que la singularidad z_0 es a lo sumo un polo de f.

EJERCICIO 4. Determinar los siguientes residuos.

a. $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}(z)}; \pi\right)$.

b. $\operatorname{Res}\left(\dfrac{z^2}{z^2-1}; 1\right)$.

c. $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}; 0\right)$.

d. $\operatorname{Res}\left(\dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}; 1\right)$.

EJERCICIO 5. Sea R un rectángulo de centro 1 y que contiene los puntos $1+i\sqrt{2}$ y $1-i\sqrt{2}$. Calcular

$$\int_R \frac{1}{z^2-2z+4}\,dz.$$

EJERCICIO 6. Sea $\gamma : t \longmapsto 1+e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dibujar la curva γ y calcular

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}\,dz.$$

EJERCICIO 7. Sea f una función meromorfa en una vecindad abierta de 0. Mostrar que $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f};0\right) = \operatorname{ord}(f;0)$, donde $\operatorname{ord}(f;0) \in \mathbb{Z}$ es el orden de f en 0.

EJERCICIO 8. Sea f una función meromorfa en una vecindad abierta de 0, con un polo simple en 0. Sea S_ε el semi-círdulo que va de $\varepsilon > 0$ a $-\varepsilon$ por el semi-plano superior de $\mathbb{C}$. Mostrar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(z)dz = i\pi \operatorname{Res}(f;0).$$

EJERCICIO 9. Mostrar las siguientes igualdades (se justificará la existencia de cada integral).

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx = \frac{2\pi}{3}$.

b. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{\pi}{6}$.

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

d. $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)}$.

Indicación : Se podrá considerar el contorno de 0 a R, luego de R a $Re^{i\frac{2\pi}{n}}$ y de $Re^{i\frac{2\pi}{n}}$ a 0.

e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5-1}\,dx = \frac{4\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$.

f. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 10. (Integral de Poisson).
Sea $r \in [0;1[$. Mostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,d\theta = 1.$$

EJERCICIO 11. (Integral de Gauss).
Sea $a > 1$ y sea P_a el paralelograma de vértices $\pm\frac{1}{2}$ y $\pm(a+ia)$ en $\mathbb{C}$.

a. Mostrar que, para cualquier $a > 1$,

$$\int_{R_a} \frac{e^{i\pi\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}}{1-e^{-i2\pi z}}\,dz = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b. Mostrar que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{P_a} \frac{e^{i\pi\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}}{1-e^{-i2\pi z}}\,dz$

$$= (1+i)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2}\,dt.$$

c. Mostrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$.