Hoja de ejercicios 6 : Funciones analíticas

2013-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Se denota
$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\ .$$
a. Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias e^z.
b. Utilizando el producto de Cauchy, mostrar que, para cualquier $(u,v) \in \mathbb{C}^2$,
$$e^{u+v} = e^u e^v.$$

Ejercicio 2. Consideremos las siguientes funciones de z :
$$\mathrm{ch}(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sh}(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$
Mostrar que ch y sh son funciones enteras y hallar su expansión en serie de potencias en 0 (se verificará en cada instancia que el radio de convergencia de la serie de potencias hallada sí es $+\infty$).

Ejercicio 3. Sea $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ el camino $t \longmapsto e^{it}$. Calcular las siguientes integrales.
a. Mostrar que la función
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{\operatorname{sen} z}{z} \end{array}$$
se extiende a una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.
b. Calcular $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}\,dz$.
c. Calcular $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z}\,dz$.

Ejercicio 4. Sea $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$. Sea $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $D(z_0; r] \subset U$. A partir de la fórmula de Cauchy para f, demostrar la fórmula del promedio :
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Ejercicio 5. Hallar la expansión en serie de potencias de las siguientes funciones en una vecindad del punto z_0 propuesto. Se precisará cada vez cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias hallada.
a. $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $z_0 = i$.
b. $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, $z_0 = 0$.
c. $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$.
d. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = 0$.
e. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = +\infty$.
f. $f(z) = \frac{e^z}{1+z}$, $z_0 = 0$.

Ejercicio 6. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie de potencias y sea $R \in [0; +\infty]$ su radio de convergencia.
a. Mostrar que si existen dos reales $m, M > 0$ tales que
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, m \leq |a_n| \leq M$$
entonces $R = 1$.
b. Mostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia un límite $l \in \mathbb{C}^*$, entonces $R = 1$.
c. Mostrar que la conclusión de la pregunta **b** no es cierta si $l = 0$ o $l = \infty$.

Ejercicio 7. Sea f una función entera. Mostrar que, si existe $w \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$f(\mathbb{C}) \subset \big(\mathbb{C} \setminus D(w;\varepsilon)\big),$$
entonces f es constante en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y biyectiva. Se recuerda que eso implica que f^{-1} es holomorfa. Se denota $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la expansión en serie de potencias de f en 0.
a. ¿Cuál es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$?
b. Mostrar que $a_1 = f'(0) \neq 0$.
c. Sea
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases} \end{array}.$$
Mostrar que g es holomorfa en $\mathbb{C}$.
d. Mostrar que $\lim_{w\to 0} g\left(\frac{1}{w}\right) = a_1$.
e. Deducir de lo anterior que g es constante y que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_1 z + a_0$, con $a_1 \neq 0$. *Indicación :* Mostrar que $\lim_{z\to+\infty} \frac{f(z)-a_0}{z} = a_1$.

Ejercicio 9. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $\mathcal{Z}(f)$ el conjunto de ceros de f. Mostrar que si K es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$, entonces el conjunto $\mathcal{Z}(f) \cap K$ es finito. *Indicación :* Se podrá utilizar sin demostración el hecho de que una sucesión acotada de elementos de $\mathbb{C}$ tiene una subsucesión convergente.

Ejercicio 10. Sean f y g dos funciones holomorfas en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$. Mostrar que $fg \equiv 0$ en U implica $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$ en U.