Hoja de ejercicios 5 : Integrales curvilíneas en $\mathbb{C}$, analiticidad

2013-II

FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea $R > 0$ y sea $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ el camino $t \longmapsto Re^{it}$. Calcular $\frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}\,dz$.

EJERCICIO 2. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, hallar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$: (i) $\exp(z)$, (ii) $\cos(z)$, (iii) $\mathrm{sen}(z)$.

EJERCICIO 3. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en U. Sea $z_0 \in U$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0; r)} \subset U$. Sea g la función del disco abierto $D(z_0; r)$ a $\mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

Mostrar, por un cálculo directo, que g es holomorfa en $D(z_0; r)$ y que

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^2}\,dw.$$

Indicación : calcular $g(z + h) - g(z)$ para $z \in D(z_0; r)$ y h pequeño.

EJERCICIO 4. Sea $R > 0$ y sea $\gamma_R : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{C}$ el camino $t \longmapsto Re^{it}$. Dibujar la imagen de γ y mostrar que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-z}}{z^2}\,dz = 0.$$

Indicación : si $z = \gamma(t)$, $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.

EJERCICIO 5. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow D(0; 1)$ una función holomorfa. Mostrar que f es constante.

EJERCICIO 6. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Se supone que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z + 1) = f(z) \text{ y } f(z + i) = f(z).$$

a. Mostrar que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, existen $x \in [0; 1]$ y $y \in [0; 1]$ tal que $f(x + iy) = f(z)$.
b. Se denota $K = \{(x + iy \in \mathbb{C} : (x, y) \in [0; 1]^2\}$ el cuadrado $[0; 1] \times [0; 1]$ en $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Mostrar que $f|_K$ es acotada y deducir de la pregunta **a** que f es acotada en $\mathbb{C}$.
c. Deducir de la pregunta **b** que f es constante en $\mathbb{C}$.

EJERCICIO 7. Mostrar que una función armónica real $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ en un abierto U de $\mathbb{C}$ es localmente la parte real de una función holomorfa. Deducir de ello que una función armónica en U es C^∞ en U.

EJERCICIO 8. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función de clase C^1 en un abierto U de $\mathbb{C}$.
a. Escribir la forma difencial compleja $f(z)dz$ bajo la forma $\alpha + i\beta$, donde α y β son 1-formas diferenciales reales en U. *Indicación :* escribir $f = u + iv$ y $dz = dx + idy$.
b. Mostrar que α y β son cerradas si y sólo si f es holomorfa.

EJERCICIO 9. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $z_0 \in U$. Sea $f : U \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa que es acotada en una vecindad de z_0.
a. Mostrar que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$.
b. Sea $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}.$$

Mostrar que g es holomorfa en U y calcular $g'(z_0)$.
c. Utilizando una expansión de g en serie de potencias en una vecindad de z_0, mostrar que existe una función holomorfa $\hat{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\hat{f}|_{U\setminus\{z_0\}} = f$.

EJERCICIO 10. Sean g y h dos funciones de clase C^1 en un abierto U de $\mathbb{C}$. Mostrar que si T es un triángulo contenido en U y ∂T es su borde (orientado positivamente y recorrido una sola vez), entonces

$$\int_{\partial T} gdz + hd\overline{z} = 2i \iint_T \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial h}{\partial z}\right) dxdy.$$

Indicación : utilizar la fórmula de Green-Riemann en T.

EJERCICIO 11. Sea f una función entera para la cual existe $c \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq c|z|$ en $\mathbb{C}$. Consideremos la función $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

a. Mostrar que g es holomorfa y acotada.
b. Deducir de lo anterior que f es un polinomio de grado ≤ 1.
c. ¿Qué pasa si $|f(z)| \leq c|z|^n$ en $\mathbb{C}$?