Hoja de ejercicios 4 : Funciones armónicas

2013-II — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $P \in C^2(U;\mathbb{R})$ una función armónica. Mostrar que si Q es un conjugado armónico de P, entonces $-P$ es un conjugado armónico de Q.

Ejercicio 2. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $\Omega^1(U)$ el conjunto de 1-formas diferenciales en U.
a. Se denota dx la proyección $(u,v) \mapsto u$ y dy la proyección $(u,v) \mapsto v$. Mostrar que (dx,dy) es una base del espacio vectorial real $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.
b. Mostrar que $\Omega^1(U)$ admite una estructura de espacio vectorial real y que, si $f \in C^1(U;\mathbb{R})$ y $\alpha \in \Omega^1(U)$, entonces la aplicación $(f\alpha)$ definida por

$$(f\alpha) : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)\alpha(x,y) \end{array}$$

es una 1-forma diferencial en U.

Ejercicio 3. Mostrar que la relación de homotopía entre caminos continuos con las mismas extremidades es una relación de equivalencia.

Ejercicio 4. Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes :
(i) Para cualquier par (γ_0,γ_1) de caminos continuos en U, con las mismas extremidades, existe una homotopía entre γ_0 y γ_1.
(ii) Para cualquier $a \in U$, cualquier lazo basado en a es homótopo al lazo constante.
(iii) Existe $a \in U$ tal que cualquier lazo basado en a es homótopo al lazo constante.

Ejercicio 5. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Sea $P \in C^2(U;\mathbb{R})$ y sea α la 1-forma diferencial

$$\alpha := -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy.$$

Mostrar que α es cerrada si y sólo si P es armónica.

Ejercicio 6. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$. Se dice que U es simplemente conexo si U es conexo y se cumple la siguiente condición : si $\gamma_0 : [0;1] \to U$ y $\gamma_1 : [0;1] \to U$ son dos caminos con las mismas extremidades, entonces γ_0 y γ_1 son homótopos. En este ejercicio, aceptaremos el siguiente resultado : si $\alpha \in \Omega^1(U)$ es cerrada y γ_0 y γ_1 son homótopos, entonces $\int_{\gamma_0}\alpha = \int_{\gamma_1}\alpha$. Mostrar entonces que cualquier 1-forma cerrada α en U es exacta. *Indicación* : Mostar que $\int_\gamma \alpha$ sólo depende de las extremidades de γ y utilizar un resultado visto en clase.

Ejercicio 7. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Hallar todas las funciones armónicas $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Demostrar la fórmula de Green-Riemann

$$\int_{\partial X} p\,dx + q\,dy = \iint_X \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

para : $X = T$ un triángulo con dos lados paralelos a los ejes de $\mathbb{R}^2$, $X = D$ un disco de $\mathbb{R}^2$, $X = R$ un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 9. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que si $u \in C^1(U;\mathbb{R})$ tiene la propiedad del promedio en U, entonces $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$ tienen la propiedad del promedio en U.

Ejercicio 10. Mostrar que U un abierto de $\mathbb{R}^2$. Se dice que $u \in C^0(U;\mathbb{R})$ tiene la propiedad del promedio en discos de U si, para cualquier disco cerrado $D(z_0;R]$ contenido en U, se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{D(z_0;R]} u(x,y)\,dxdy.$$

Mostrar que u tiene la propiedad del promedio en discos de U si y sólo si u tiene la propiedad del promedio en círculos de U :

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta$$

para cualquier $r > 0$ tal que $D(z_0;r]$ está contenido en U.

Ejercicio 11. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto arco-conexo. Mostrar que si $U = U_1 \cup U_2$ con U_1 y U_2 abiertos tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces $U_1 = \emptyset$ o $U_2 = \emptyset$.

Ejercicio 12. Con ayuda del principio del máximo para funciones armónicas con valores en $\mathbb{C}$, mostrar que cualquier polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces, teniendo en cuenta la multiplicidad de cada una.