Hoja de ejercicios 3 : Funciones holomorfas II

2013-II | Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un subconjunto cualquiera.
a. Se define el conjunto

$$\mathring{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \varepsilon > 0, D(z;\varepsilon) \subset \Omega\},$$

llamado el *interior* de A. Mostrar que $\mathring{A}$ es abierto en $\mathbb{C}$ y que A es abierto en $\mathbb{C}$ si y sólo si $\mathring{A} = A$.
b. Se define el conjunto

$$\overline{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0, D(z;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

llamado la *clausura* de A. Mostrar que $\overline{A}$ es cerrado en $\mathbb{C}$ y que A es cerrado en $\mathbb{C}$ si y sólo si $\overline{A} = A$.
c. Se define el conjunto $\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$, llamado la *frontera* de A. Se denota $\Omega^c := \mathbb{C} \setminus \Omega$ el complemento de Ω en $\mathbb{C}$. Mostrar que $\partial A = \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$, que $\mathring{\partial\Omega} = \emptyset$ y que $\overline{\partial\Omega} = \partial\Omega$.

Ejercicio 2. Sean E y F dos espacios vectoriales *complejos* y $u : E \longrightarrow F$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal de E a F. Mostrar que existe un único par (u_1, u_2) de aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de E a F tales que :

1. $u_1 : E \longrightarrow F$ es $\mathbb{C}$-lineal,
2. $u_2 : E \longrightarrow F$ es $\mathbb{C}$-antilineal,
3. $u = u_1 + u_2$.

Ejercicio 3. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sea E el conjunto de las funciones de Ω a $\mathbb{C}$ que son $\mathbb{R}$-diferenciables.
a. Mostrar que E es un espacio vectorial *complejo. Indicación :* mostrar que E es un sub-espacio vectorial del espacio vectorial complejo $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{C})$ de todas las funciones de Ω a $\mathbb{C}$.
b. Sean ∂ y $\overline{\partial}$ los operadores de E a $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{C})$ definidos de tal manera que se cumpla la relación $df = \partial f\, dz + \overline{\partial} f\, d\overline{z}$ (cf. ejercicio 6 de la hoja 2). Mostrar que ∂ y $\overline{\partial}$ son aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales de E a $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{C})$ y que, si $f \in C^2(\Omega;\mathbb{C})$, entonces

$$\partial\overline{\partial} f = \overline{\partial}\partial f = \frac{1}{4}\Delta f$$

donde $f = P + iQ$ y $\Delta f := \Delta P + i\Delta Q$. Se recuerda que el laplaciano de una función $g \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ es la función $\Delta g := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Ejercicio 4. Sea $\Omega := D(0;R)$ con $R > 0$ y sea $P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en Ω (es decir que P es de clase C^2 en Ω y que $\Delta P = 0$). Sean (x_0, y_0) y (x, y) dos puntos de Ω y sea R el rectángulo de vértices (x_0, y_0) y (x, y) cuyos lados son paralelos a los ejes real e imaginario de $\mathbb{C}$ (notemos que, debido a la forma particular de Ω, se tiene $R \subset \Omega$).
a. Mostrar que la función $Q(x,y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(s,y_0)\,ds$ es armónica en Ω y que $f := P + iQ$ es holomorfa en Ω.
b. Sea $\widehat{Q}(x,y) := -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,t)\,dt$. Mostrar que

$$Q(x,y) - \widehat{Q}(x,y) = \iint_R \Delta P(s,t)\,dsdt = 0$$

e interpretar el resultado.

Ejercicio 5. Sea $P : (x,y) \longmapsto xy$ en $\Omega = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Mostrar que P es armónica en $\mathbb{C}$ y hallar los conjugados armónicos de P.

Ejercicio 6. Mostrar que la ecuación $e^z = 0$ no tiene soluciones en $\mathbb{C}$ y deducir de ello que la exponencial compleja es una aplicación conforme de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^*$.

Ejercicio 7. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \\ x & \longmapsto & \big(f_1(x), f_2(x)\big) \end{array}.$$

Mostrar que f es diferenciable en un punto $x_0 \in \Omega$ si y sólo si $f_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{p_1}$ y $f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{p_2}$ ambas son diferenciables en x_0 y que, en ese caso, la aplicación lineal $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2})$ coincide con la aplicación lineal $v \longmapsto \big(f_1'(x)\cdot v, f_2'(x)\cdot v\big)$.

Ejercicio 8. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean E, F y G tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.
a. Mostrar que la aplicación

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}(F;G)\big) & \longrightarrow & \mathcal{B}(E \times F; G) \\ u & \longmapsto & b_u \end{array},$$

donde $\mathcal{B}(E \times F; G)$ es el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de las aplicaciones $\mathbb{K}$-bilineales de $E \times F$ a G y $b_u(x,y) = (u(x))(y)$, es un isomorfismo de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.
b. Si $E = F = \mathbb{K}^n$, $(e_i)_{1 \le i \le n}$ la base canónica y $G = \mathbb{K}$, mostrar que el espacio vectorial $\mathcal{B}(\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n; \mathbb{K})$ de formas $\mathbb{K}$-bilineales en n variables es isomorfo a $\mathcal{M}(n;\mathbb{K})$ vía la aplicación $b \mapsto (b(e_i, e_j))_{(i,j)}$.