Hoja de ejercicios 2 : Funciones holomorfas

2013-II Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $r > 0$ y $z \in \mathbb{C}$. Se pone

$$D(z;r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| < r\}$$

y

$$D(z;r] = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| \leq r\}.$$

Mostrar que $D(z;r)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ y que $D(z;r]$ es un cerrado de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 2. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, f y g dos funciones de Ω a $\mathbb{C}$, holomorfas en un punto z de Ω, y sea a un número complejo. A partir de la definición de la $\mathbb{C}$-derivabilidad, demostrar las siguientes afirmaciones :

a. La función (af) es $\mathbb{C}$-derivable en z y $(af)'(z) = af'(z)$.

b. La función $(f+g)$ es $\mathbb{C}$-derivable en z y $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.

c. La función fg es $\mathbb{C}$-derivable en z y $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

d. Si $g(z) \neq 0$ entonces $g \neq 0$ en una bola abierta centrada en z, además la función $1/g$ es $\mathbb{C}$-derivable en z y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z) = -\frac{g'(z)}{g(z)^2}.$$

e. Si $g(z) \neq 0$ entonces $g \neq 0$ en una bola abierta centrada en z, además la función f/g es $\mathbb{C}$-derivable en z y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Ejercicio 3. (Regla de la cadena) Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, $\mathbb{C}$-derivable en un punto $z \in \Omega$. Sea Ω' es un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene $f(\Omega)$ y sea $g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$-derivable en $w = f(z)$. Mostrar que $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-derivable en z y que

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Ejercicio 4. Mostrar que la función $f : z \mapsto \overline{z}$ no es holomorfa. Misma pregunta para las funciones $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ y $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$. Mostrar que, sin embargo, esas tres funciones son diferenciables en el sentido real.

Ejercicio 5. Utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para demostrar que la función $z \mapsto e^z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y calcular su derivada. Misma pregunta para las funciones, cos, sen, cosh, senh, $z \mapsto e^{(\cos z)^2}$ y $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$, la rama principal del logaritmo complejo. *Indicación* : Mostrar primero que, para cualquier $a \in \mathbb{C}$, $(e^{az})' = ae^{az}$ y utilizar las fórmulas de tipo $\mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, etc.

Ejercicio 6. (Difícil). Sean $z = x + iy$ las coordenadas canónicas de $\mathbb{C}$, de tal manera que $dz = dx + idy$ y $d\overline{z} = dx - idy$. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido real en algún abierto Ω, encontrar funciones $\frac{\partial f}{\partial z} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)d\overline{z}.$$

Deducir de eso que f es holomorfa en un punto z_0 de Ω si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0,$$

Indicación : escribir $f = P + iQ$ con $P, Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el hecho de que si f es diferenciable en el sentido real, entonces $dP = \frac{\partial P}{\partial x}\, dx + \frac{\partial P}{\partial y}\, dy$ y $dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dy$.

Ejercicio 7. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sea

$$\overline{\Omega} := \{w \in \mathbb{C} \mid \overline{w} \in \Omega\}.$$

a. Mostrar que $\overline{\Omega}$ es un abierto de $\mathbb{C}$. Dar un ejemplo y dibujarlo.

b. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω. Mostrar que la función

$$g : w \longmapsto \overline{f(\overline{w})}$$

es holomorfa en $\overline{\Omega}$.

Ejercicio 8. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una función $\mathbb{R}$-diferenciable en un punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Se denotan $f = (f_1, \ldots, f_p)$ las componentes de f y $\mathrm{Jac}_f(x)$ la matriz, en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$, de la aplicación lineal $f'(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Mostrar que cada f_j admite una derivada parcial con respecto a cada x_i y que

$$\mathrm{Jac}_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$