Hoja de ejercicios 1 : Números complejos

2013-II FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea $\mathbb{C}$ el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$, dotado de su base canónica $(1, i)$ y de la multiplicación

$$(x+iy)(u+iv) := (xu-yv)+i(xv+yu).$$

A continuación, denotaremos $z = x+iy$ y $w = u+iv$.
a. Mostrar que $zw = wz$ en $\mathbb{C}$ y que, si $z \neq 0$ en $\mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$. Si $z' = x'+iy'$, mostrar que $(z+z')w = zw+z'w$ y que $(zz')w = z(z'w)$.
b. Recordar la definición del conjugado $\overline{z}$ y del módulo $|z|$ de un número complejo z.
c. Mostrar que $\overline{\overline{z}} = z$ y que $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\overline{z} = z$.
d. Mostrar las siguientes propiedades : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$, $|zw| = |z|\,|w|$, $|z+w| \leq |z|+|w|$, $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$, donde $\mathrm{Re}(z) := x$ e $\mathrm{Im}(z) := y$ denotan respectivamente la parte real y la parte imaginaria del número complejo $z = x+iy$.
e. Mostrar que $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ e $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ son aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 2. (Difícil). Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio con coeficientes reales. Sea C el cociente y R el resto de la división euclidiana de P por X^2+1 :

$$P = (X^2+1)C+R, \text{ donde grado}(R) < 2$$

(es decir, $R = bX+a$ con $a, b \in \mathbb{R}$). Utilizaremos la notación $[P] := R$. Sea E el conjunto de los restos de la división euclidiana por X^2+1 en $\mathbb{R}[X]$, con suma y multiplicación así definida : $[P_1]+[P_2] := [P_1+P_2]$ y $[P_1][P_2] := [P_1P_2]$.
a. Mostrar que $[X]^2 = -[1]$.
b. Si $[P_1] = b_1X+a_1$ y $[P_2] = b_2X+a_2$, expresar $[P_1][P_2]$ bajo la forma $bX+a$.
c. Mostrar que la aplicación $f : E \to \mathbb{C}$ definida por $f([bX+a]) = a+ib$ es una biyección que cumple con las siguientes propiedades : $f([P_1]+[P_2]) = f([P_1])+f([P_2])$, $f([P_1][P_2]) = f([P_1])f([P_2])$ y $f([1]) = 1$.

EJERCICIO 3. Mostrar la fórmula de *de Moivre* : para cualquier entero $n \geq 1$, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)$. Si denotamos $e^{i\theta} := \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, mostrar que $|e^{i\theta}| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

EJERCICIO 4. Sea $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi;\pi]$ el argumento principal del número complejo $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$ (estamos suponiendo $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$) y sea

$$\arg(z) := \{\mathrm{Arg}(z)+k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

a. Mostrar que $\arg(z) = \arg(w)$ (como conjuntos) si y sólo si existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(w)+k2\pi$.
b. Interpretar y demostrar las siguientes igualdades : $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$, $\arg(zw) = \arg(z)+\arg(w)$.
c. Mostrar que dos números complejos son iguales si y sólo si tienen mismo módulo y mismo argumento.

EJERCICIO 5. Utilizando la representación polar de un número complejo, resolver la ecuación $z^8 = 1$ en $\mathbb{C}$. Mostrar que la suma de las soluciones es 0.

EJERCICIO 6. Sea $S^2 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2+Y^2+Z^2 = 1\}$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ e identifiquemos $\mathbb{C}$ con el plano de ecuación $Z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.
a. Definir y calcular la proyección estereográfica $p_S : S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{C}$ de polo $S := (0,0,-1)$. Mostrar que p_S es una biyección y calcular su inversa.
b. Si $p_N : S^2\backslash\{N\}$ es la proyección estereográfica de polo $N := (0,0,1)$, mostrar que, para cualquier $z \in \mathbb{C}^*$, $p_S \circ p_N^{-1}(z) = 1/\overline{z}$. Calcular también $p_N \circ p_S^{-1}$.
b. Interpretar geométricamente la transformación $z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$ en $\mathbb{C}^*$.

EJERCICIO 7. Si $z = x+iy \in \mathbb{C}$, definamos $\exp(x+iy) := \exp(x)(\cos(y)+i\,\mathrm{sen}(y))$, así como $\cos(z) := \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$ y $\mathrm{sen}(z) := \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$.
a. Mostrar que

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

b. Mostrar que $\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$.

EJERCICIO 8. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, sea $\mathrm{Log}(z) := \log|z| + i\mathrm{Arg}(z)$ (el valor principal del logaritmo de z).
a. Mostrar que $(\exp \circ \mathrm{Log})(z) = z$.
b. Calcular $\mathrm{Log}(i)$ y $\mathrm{Log}(1+i)$.
c. Comparar $\exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(i))$ y $\sqrt{i}$, donde $\sqrt{re^{i\theta}} := \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ es una rama de la función raiz cuadrada en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.