Solución del examen final

2013-II — J.C. Cortissoz, F. Schaffhauser

Ejercicio 1. La hipótesis significa que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z) - w| \geq \varepsilon > 0.$$

En particular, $f(z) - w \neq 0$ en $\mathbb{C}$ y podemos definir una función

$$g : z \longmapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

que es holomorfa en $\mathbb{C}$. Esa función entera además cumple con que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Por el teorema de Liouville, g es constante y por consiguiente f también.

Ejercicio 2. a. Para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \{1; 2\}$, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z}.$$

En la corona $0 < |z-1| < 1$, $\frac{1}{z-1}$ es su propia expansión en serie de Laurent y

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n$$

así que la expansión en serie de Laurent de f en la corona $0 < |z-1| < 1$ es

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} (z-1)^n = \frac{1}{z-1} + 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \ldots + (z-1)^n + \ldots$$

(en particular, 1 es un polo de f y el residuo de f en 1 es 1).

En la corona $1 < |z-1| < 2$, $\frac{1}{z-1}$ es otra vez su propia expansión en serie de Laurent y

$$\frac{1}{2-z} = \frac{-1}{(z-1)\left[1 - \frac{1}{z-1}\right]} = \frac{-1}{z-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(z-1)^{n+1}}$$

así que la expansión en serie de Laurent de f en la corona $1 < |z-1| < 2$ es

$$f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{(z-1)^n} = -\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} - \ldots - \frac{1}{(z-1)^n} - \ldots$$

(notemos que esta expansión en serie de Laurent, por la forma de la corona que escogimos, no nos da información sobre el comportamiento de f alrededor del punto 1 pero sí nos dice que $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$).

b. Ya que la función $z \longmapsto \exp(1/z)$ es holomorfa en una vecindad de 1, la función $g : z \longmapsto \frac{\exp(1/z)}{1-z}$ tiene un polo simple en 1 y el residuo en ese punto es

$$\mathrm{Res}(g; 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) g(z) = -e.$$

Para calcular el residuo de g en 0, recordemos primero que la expansión en serie de Laurent de una función holomorfa en la vecindad de una singularidad aislada es una serie uniformemente convergente en cualquier círculo γ_ε contenido en el dominio de holomorfía. Así que, en el cálculo que sigue, podremos intercambiar sumas e integrales. Para $\varepsilon \in]0; 1[$, se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g;0) &= \frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz \\
&= \frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\exp(1/z)}{1-z}\,dz \\
&= \frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!\,z^n}\,dz \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z^n}\frac{1}{1-z}\,dz\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\,dz\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z^{n-k}}\,dz\right)\right].
\end{aligned}$$

Por el teorema de Cauchy,

$$\frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z^{n-k}}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n-k\neq 1 \\ 1 & \text{si } n-k=1 \end{cases}$$

pues la función $z \longmapsto \frac{1}{z^{n-k}}$ tiene primitiva holomorfa en un abierto que contiene γ_ε si y solamente si $n-k\neq 1$. Entonces

$$\operatorname{Res}(g;0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e-1.$$

Ejercicio 3. a. Mostremos que $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Primero, la integral converge pues la función $x \longmapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ es continua (por lo tanto localmente integrable) en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, admite una extensión continua a todo $\mathbb{R}$ (así que $\int_{-1}^{1}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ converge) y cumple con $\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ (así que $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ y $\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ convergen absolutamente y por lo tanto convergen).

Consideremos la función $f : z \longmapsto \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz$, holomorfa en $\mathbb{C}^*$, y, para $r>0$ y R>0 tales que $r<R$, el lazo $\gamma := \gamma_- + \gamma_r + \gamma_+ + \gamma_R$, obtenido a partir de los caminos

$$\gamma_- : \begin{array}{ccc} [-R;-r] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{array}, \quad \gamma_r : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & re^{i(\pi-t)} \end{array}$$

$$\gamma_+ : \begin{array}{ccc} [r;R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{array}, \quad \gamma_R : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}.$$

Notemos que γ es homotopicamente trivial en $\mathbb{C}$, así que, por el teorema de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Además, un cambio de variable $x=-t$ en la primera integral muestra que

$$\int_{\gamma_-} f(z)\,dz + \int_{\gamma_+} f(z)\,dz = 2\int_r^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \underset{r\to 0, R\to+\infty}{\longrightarrow} 2\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Por otro lado, si $|z|=R$ e $\operatorname{Im} z \ge 0$, se tiene $\left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right| \le \frac{2}{R^2}$, así que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{2\pi R}{R^2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por fin, al utilizar la expansión en serie de potencias $e^{iz} = 1+(iz)+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\ldots$, se tiene que

$$\frac{1-e^{iz}}{z^2} = \frac{-i}{z} - \frac{i^2}{2} - \frac{i^3 z}{3!} + \ldots.$$

La función

$$g : z \longmapsto \frac{i^2}{2} + \frac{i^3 z}{3!} + \dots$$

tiene una primitiva holomorfa G en $\mathbb{C}$, así que

$$\int_{\gamma_r} g(z)\,dz = G(r) - G(-r)$$

y por lo tanto

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = -i \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,dz - G(r) + G(-r) = -\pi - G(r) + G(-r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} -\pi - G(0) + G(0) = -\pi.$$

De todo lo anterior deducimos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,x = \frac{\pi}{2}.$$

b. Mostremos que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. Primero, la integral está bien definida pues el integrande es una función continua de θ en el intervalo compacto $[0;2\pi]$. Al utilizar que, si $z = e^{i\theta}$, entonces $\operatorname{sen}\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$, podemos escribir

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = \int_\gamma \frac{1}{3+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}\,\frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{2}{z^2+6iz-1}\,dz$$

donde $\gamma(t) = e^{it}$ para $t \in [0;2\pi]$. La función $g : z \longmapsto \frac{2}{z^2+6iz-1}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en los puntos $z_1 = -i(3-2\sqrt{2})$ y $z_2 = -i(3+2\sqrt{2})$. La curva γ es homotopicamente trivial en $\mathbb{C}$ y tiene índice 1 con respecto a z_1 e índice 0 con respecto a z_2. Luego, por el teorema de los residuos, se tiene que

$$\int_\gamma g(z)\,dz = i2\pi \operatorname{Res}(g;z_1) = i2\pi \left.\frac{2}{2z+6i}\right|_{z=-i(3-2\sqrt{2})} = \frac{4i\pi}{-6i+4i\sqrt{2}+6i} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$