UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — VARIABLE COMPLEJA

Examen final. Duración : 2 horas.

28 DE NOVIEMBRE 2013 — J.C. CORTISSOZ, F. SCHAFFHAUSER

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**. Cada pregunta vale **6 puntos** (Total: 30 puntos).

EJERCICIO 1. Sea f una función entera. Muestre que si existe $w \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(\mathbb{C}) \subset \big(\mathbb{C} \setminus D(w;\varepsilon)\big)$, entonces f es una función constante.

EJERCICIO 2. a. Halle las expansiones en serie de Laurent de la función

$$f : z \longmapsto \frac{1}{(z-1)(2-z)}$$

en la corona $0 < |z-1| < 1$ y en la corona $1 < |z-1| < +\infty$.

Indicación : Para la segunda expansión, se podrá utilizar que

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{-1}{(z-1)\left[1 - \frac{1}{z-1}\right]}.$$

b. Calcule los residuos en 1 y en 0 de la función

$$g : z \longmapsto \frac{\exp(1/z)}{1-z}.$$

Indicación : Para el residuo en 0, muestre primero que, si γ_ε es un círculo centrado en 0 de radio $\varepsilon \in]0;1[$ recorrido una sola vez, entonces

$$\frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z^{n-k}}\,dz\right)\right].$$

EJERCICIO 3. Justifique la existencia de las siguientes integrales y muestren las identidades propuestas.

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

b. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$