Solución de la tarea 3

2013-I FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

1. El rango de una aplicación lineal T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$ es la dimension de $\operatorname{Im} T$, que es un subespacio de $\mathbb{R}^p$. Por lo tanto, $\operatorname{rg} T \leq p$. Aquí la hipótesis es que $\operatorname{rg} T = n$, luego $n \leq p$. Nótese además que, por la fórmula del rango, $n = \dim \ker T + \operatorname{rg} T \geq \operatorname{rg} T$, así que la hipótesis del ejercicio es que $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tiene el mayor rango posible.

2. Ya que $\operatorname{rg} T = n$ y que T es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$, se tiene que $\dim \ker T = n - \operatorname{rg} T = 0$, luego T es inyectiva. Por lo tanto, la imagen por T de una familia libre es una familia libre.

3. a. Por linealidad de T, se tiene que

$$t_1 T(x_1) + \ldots + t_n T(x_n) = T(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n),$$

lo cual implica que $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$.

b. Sea A la matriz $n \times n$ cuya k-ésima columna es el vector $x_k \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\operatorname{vol}(\mathcal{C}) = |\det A| = \sqrt{\det(A^t A)}$. Sea B la matriz $p \times n$ cuya k-ésima columna es el vector $T(x_k) \in \mathbb{R}^p$. Entonces $\operatorname{vol}(\mathcal{C}') = \sqrt{\det(B^t B)}$.

c. Si $M \in \mathcal{M}(p \times n; \mathbb{R})$ es la matriz de T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$ y si las matrices A y B están definidas como en la pregunta **3.b**, entonces $B = MA$. Luego $B^t B = A^t M^t M A$, por lo que

$$\det(B^t B) = \det(A^t M^t M A) = \det(A^t) \det(M^t M) \det(A),$$

pues A^t, $M^t M$ y A son matrices cuadradas. Además, $\det(A^t) = \det A$, luego

$$\det(B^t B) = \det(M^t M) \times (\det A)^2.$$

Eso implica que

$$\operatorname{vol}\big(T(\mathcal{C})\big)^2 = \operatorname{vol}(\mathcal{C}')^2 = \det(B^t B) = \big(\det(M^t M)\big)\big(\det A\big)^2 = \big(\det(M^t M)\big)\operatorname{vol}(\mathcal{C})^2,$$

luego

$$\operatorname{vol}\big(T(\mathcal{C})\big) = \sqrt{\det(M^t M)}\,\operatorname{vol}\big(\mathcal{C}\big).$$

Interpretación: Si se envía una caja $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$ por una aplicación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, la imagen $T(\mathcal{C})$ es una caja n-dimensional de $\mathbb{R}^p$ cuyo volumen es igual al volumen de $\mathcal{C}$ multiplicado por $\sqrt{\det(M^t M)}$, donde M es la matriz de T en las bases canónicad de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$.

4. Si $T(x, y) = (2x + 3y, x - y, 2y)$ y $\mathcal{C}$ es la caja de $\mathbb{R}^2$ definida por los vectores $x_1 = (2, 1)$ y $x_2(0, 1)$, se tiene que $T(x_1) = (7, 1, 2)$, $T(x_2) = (3, -1, 2)$ y

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\operatorname{vol}(\mathcal{C}) = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2,$$

$$\det(M^t M) = \det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} = 45$$

y
$$\mathrm{vol}\big(T(\mathcal{C})\big) = \sqrt{45} \times 2 = 6\sqrt{5}.$$
Se puede también verificar que, con
$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$
se tiene
$$\det(B^t B) = \det \begin{pmatrix} 54 & 24 \\ 24 & 14 \end{pmatrix} = 180 = (6\sqrt{5})^2.$$

Ejercicio II

Se tiene
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-2) \times (-\frac{1}{2}) = 1 \neq 0,$$
por lo que A es invertible. Si se pone
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$
es fácil verificar que $BA = I_4$, por lo que $A^{-1} = B$. Nótese que los bloques diagonales de A^{-1} son los inversos de los bloques diagonales de A.

Ejercicio III

La familia $\mathcal{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, (1+X)^3)$ es una familia de polinomios cuyos grados son todos distintos. Luego $\mathcal{B}$ es una familia libre. Ya que $\mathcal{B}$ tiene 4 vectores, todos en $\mathbb{R}_3[X]$, y que $\mathbb{R}_3[X]$ tiene dimensión 4, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}_3[X]$. Para hallar las coordenadas de $P = -1 - X + X^2 + X^3$ en la base $\mathcal{B}$, se resuelve el sistema
$$\begin{aligned} -1 - X + X^2 + X^3 &= \lambda\, 1 + \mu(1+X) + \nu(1+X)^2 + \xi(1+X)^3 \\ &= (\lambda + \mu + \nu + \xi)\, 1 + (\mu + 2\nu + 3\xi)X + (\nu + 3\xi)X^2 + \xi X^3 \end{aligned}$$
(eso sí es un sistema pues dos polinimios son iguales si y sólo si todos sus coeficientes son iguales). La úniva solución del sistema es $\xi = 1$, $\nu = -2$, $\mu = 0$ y $\lambda = 0$, así que
$$P = -2(1+X)^2 + (1+X)^3$$
(es decir que las coordenadas de P en la base $\mathcal{B}$ son $(0, 0, -2, 1)$. Otra manera de redactar la solución de la presente pregunta es resolviendo el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donde la matriz cuadrada 4×4 que aparece representa, en columnas, las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ en la base canónica $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ y el segundo miembro de la ecuación representa las coordenadas de P en esa misma base.

Ejercicio IV

Respuesta tramposa: el conjunto $C(A) = \{B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{R}) \mid AB - BA = 0\}$ es el núcleo de la transformación lineal $A \longmapsto (AB - BA)$ de $\mathcal{M}(n; \mathbb{R})$, luego es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(n; \mathbb{R})$.