Tarea 3: para entregar el 1 de abril 2013

2013-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio I

Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una familia libre en $\mathbb{R}^n$ y sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicación lineal de rango n.

1. Recordar brevemente por qué, necesariamente, $p \geq n$.

2. Mostrar que los vectores $(T(x_1), \ldots, T(x_n))$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^p$.

3. Sea $\mathcal{C}$ la caja n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ definida por los vectores $(x_1, \ldots, x_n)$ y sea $\mathcal{C}'$ la caja n-dimensional en $\mathbb{R}^p$ definida por los vectores $(T(x_1), \ldots, T(x_n))$. Se recuerda que eso significa que

$$\mathcal{C} = \{t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n : \forall i,\, 0 \leq t_i \leq 1\}$$

y

$$\mathcal{C}' = \{t_1 T(x_1) + \ldots + t_n T(x_n) : \forall i,\, 0 \leq t_i \leq 1\}.$$

Se denota $\mathrm{vol}(\mathcal{C})$ el volumen de la caja $\mathcal{C}$ y $\mathrm{vol}(\mathcal{C}')$ el de $\mathcal{C}'$. Si A es una matriz, se denota A^t su transpuesta.

a. Mostrar que $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$.

b. Definir una matriz $A \in \mathcal{M}(n; \mathbb{R})$ tal que $\mathrm{vol}(\mathcal{C}) = |\det A|$ y una matriz $B \in \mathcal{M}(p \times n; \mathbb{R})$ tal que $\mathrm{vol}(\mathcal{C}') = \sqrt{\det(B^t B)}$.

c. Sea $M \in \mathcal{M}(p \times n; \mathbb{R})$ la matriz de T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$. Mostrar que

$$\mathrm{vol}\big(T(\mathcal{C})\big) = \sqrt{\det(M^t M)}\, \mathrm{vol}(\mathcal{C}).$$

Indicación: si las matrices A y B de la pregunta anterior están bien escogidas, se debe tener $B = MA$.

4. Hallar $\mathrm{vol}(T(\mathcal{C}))$ cuando

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + 3y, x - y, 2y) \end{array}$$

y $\mathcal{C}$ es la caja de $\mathbb{R}^2$ definida por los vectores $(2, 1)$ y $(0, 1)$.

Ejercicio II

Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es invertible y calcular A^{-1}.

Ejercicio III

Mostrar que $\mathcal{B} = (1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3)$ es una base de $\mathbb{R}_3[X]$ y hallar las coordenadas de $P = -1 - X + X^2 + X^3$ en la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio IV

Sea $n \geq 1$ y sea $A \in \mathcal{M}(n; \mathbb{R})$. Se considera el conjunto

$$C(A) = \{B \in \mathcal{M}(n; \mathbb{R}) \mid AB - BA = 0\}.$$

Mostrar que $C(A)$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(n; \mathbb{R})$.