Solución de la tarea 2

2013-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

$\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ pues son dos vectores no colineales y $\dim\mathbb{R}^2 = 2$. Ya que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, se tiene que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

De la misma manera $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, por lo que

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

La matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es la matriz cuyas columnas son $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, es decir:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio II

1. Para cualquier $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\|A_\theta v\|^2 &= \big(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\big)x^2 + \big((-\operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta\big)y^2\\ &= x^2 + y^2\\ &= \|v\|^2\end{aligned}$$

Luego $\|A_\theta v\| = \|v\|$. De la misma manera,

$$\begin{aligned}A_\theta v \cdot v &= \big((\cos\theta)x + (-\operatorname{sen}\theta)y\big)x + \big((\operatorname{sen}\theta)x + (\cos\theta)y\big)y\\ &= (\cos\theta)(x^2+y^2)\\ &= (\cos\theta)\|v\|^2\\ &= \|A_\theta v\|\|v\|\cos\theta.\end{aligned}$$

2. Por definición de la rotación directa de centro $(0,0)$ y de ángulo $\theta \in [0;2\pi]$ en $\mathbb{R}^2$, la imagen por R_θ del vector v de coordenadas polares (r,α) es el vector de coordenadas polares $(r,\theta+\alpha)$.

3. Luego, en coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}R_\theta v &= \big(r\cos(\theta+\alpha), r\operatorname{sen}(\theta+\alpha)\big)\\ &= \big(r(\cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha), r(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha)\big)\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\operatorname{sen}\alpha\end{pmatrix}\\ &= A_\theta v.\end{aligned}$$

4. La aplicación inversa de la rotación R_θ es la rotación $R_{-\theta}$. Luego, la matriz de R_θ^{-1} en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que, en efecto, $A_{-\theta}A_\theta = A_\theta A_{-\theta} = I_2$.

5. Se tiene $R_\theta^n = R_{n\theta}$, luego la matriz de R_θ^n es

$$A_\theta^n = A_{n\theta} = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Ejercicio III

1. $(v, w) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ pues son 2 vectores linealmente independientes y $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 2. Se tiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(v - w)$ luego $p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}p(v) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. De la misma manera, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(v + w)$ luego $p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}p(v) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, la matriz de p en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. La matriz de p es una matriz 2×2 cuyas columnas son iguales, por lo que su rango es igual a 1. Por lo tanto, la imagen de p es una recta en $\mathbb{R}^2$. Ya que v pertenece a $\operatorname{Im} p$ (pues $v = p(v)$), se tiene que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(v)$.

3. a. S es lineal pues es una combinación lineal de aplicaciones lineales.

b. $S(v) = 2p(v) - v = 2v - v = v$ y $S(w) = 2p(w) - w = 0 - w = -w$. Por lo tanto, S es la reflexión con respecto a la recta generada por v (i.e. la recta de ecuación $y = x$).

c. Ya que la matriz de p en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es A, la matriz de $S = 2p - \operatorname{Id}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$B = 2A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d. Se tiene que $B^2 = I_2$. Luego B es invertible y $B^{-1} = B$. Por lo tanto S es invertible y $S^{-1} = S$.

e. $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es invertible, luego $\operatorname{Im}(S) = \mathbb{R}^2$.

Ejercicio IV

La demostración es por contradicción. Si la familia $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es libre en $\mathbb{R}[X]$, entonces existen unos coeficientes $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ no todos nulos y tales que

$$\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n = 0.$$

Sea entonces

$$k = \max\{i \in \{0; \ldots; n\} \mid \lambda_i \neq 0\}$$

(k está bien definido pues es el máximo de un sub-conjunto finito no vacío de $\mathbb{N}$). Entonces por hipótesis, tenemos que $\lambda_0 P_0 + \ldots \lambda_k P_k = 0$ con $\lambda_k \neq 0$. Ya que los grados de los P_i van creciendo, tenemos que

$$\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_k P_k = \lambda_k(a_k X^k) + Q$$

donde $a_k X^k$ es el monomio de grado más alto en P_k (en particular, $a_k \neq 0$) y Q es un polinomio de grado menor o igual a k. Luego $a_k \lambda_k X^k + Q = 0$ y por lo tanto $a_k \lambda_k = 0$. Pero eso es absurdo, pues $\lambda_k \neq 0$ y $a_k \neq 0$.