UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — ÁLGEBRA LINEAL 1 DE HONORES

Tarea 2: para entregar el 11 de marzo 2013

2013-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

Justificar brevemente que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y determinar la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, de la transformación lineal T definida por $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Ejercicio II

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con su base canónica (e_1, e_2) y su producto escalar euclidiano canónico (producto punto). Sea $\theta \in [0; 2\pi]$ y sea A_θ la matriz $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta)\\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

1. Mostrar que, para cualquier $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|A_\theta v\| = \|v\|$ y $A_\theta v \cdot v = \|A_\theta v\|\|v\| \cos(\theta)$.

2. Sea R_θ la rotación directa (en el sentido trigonométrico) de centro $(0,0)$ y de ángulo θ en $\mathbb{R}^2$. Sean (r, α) las coordenadas polares de un vector $v = (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Determinar las coordenadas polares de $R_\theta(v)$.

3. Deducir de lo anterior que, para cualquier $v \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta(v) = A_\theta v$. Eso demuestra en particular que R_θ es una aplicación lineal.

4. Mostrar que R_θ es invertible y determinar la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, de la transformación R_θ^{-1}.

5. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Determinar, sin cálculos, la matriz de R_θ^n en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio III

Sea $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$.

1. Justificar brevemente que (v, w) es una base de $\mathbb{R}^2$ y determinar la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, de la transformación lineal p definida por $p(v) = v$ y $p(w) = 0$.

2. Determinar $\operatorname{rg}(p)$ y hallar la imagen de p.

3. Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $S = 2p - \mathrm{Id}$.

a. Mostrar que S es lineal.

b. Calcular $S(v)$ y $S(w)$. Interpretar el resultado geométricamente.

c. Hallar la matriz de S en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

d. Mostrar que S es invertible y que $S^{-1} = S$.

e. Determinar $\operatorname{Im}(S)$.

Ejercicio IV

Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el grado de P_n es estrictamente inferior al grado de P_{n+1}. Mostrar que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia libre. *Indicación*: suponer que existe una combinación lineal nula de los $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con coeficientes no triviales y llegar a una contradicción.