Tarea 1: para entregar el 29 de febrero 2013

2013-I FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio I

Sea $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones reales que cumplen, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, con la relación

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \tag{1}$$

1. Mostrar que E es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Hallar todas las sucesiones geométricas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (es decir, las sucesiones de la forma $u_n = rq^n$ para algún $q \in \mathbb{R}$) que cumplen con la relación (1).

3. Se denotan α y β las soluciones de la ecuación $q^2 = q + 1$. Mostrar que las sucesiones cuyos términos generales son $a_n = \alpha^n$ y $b_n = \beta^n$ forman una famila libre en E (i.e. son linealmente independientes en E).

4. Mostrar que cualquier sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E es combinación lineal de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Deducir de todo lo anterior que $\dim E = 2$.

Ejercicio II

Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales y sea $u : E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación lineal. Sea F_1 un sub-espacio vectorial de E_1 y sea F_2 un sub-espacio vectorial de E_2.

1. Mostrar $u(F_1)$ es un sub-espacio vectorial de E_2.

2. Mostrar que $u^{-1}(F_2)$ es un sub-espacio vectorial de E_1.